Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE† TÜBINGEN

R. NEVANLINNA HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND, 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 4. DEZEMBER 1961)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Math. Z.

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

---

77. Band **Inhalt** 5. (Schluß-)Heft

LAMPRECHT, E., Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper 391

MÜLLER, G. H., Nicht-Standardmodelle der Zahlentheorie 414

JEHNE, W., Zur Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes 439

HABETHA, KL., Über die Werteverteilung in Winkelräumen 453

LAMPRECHT, E.
Math. Zeitschr. 77, 391—413 (1961)

Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

ERICH LAMPRECHT

Einleitung

Die für endlich-algebraische Zahlkörper und für algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld seit längerer Zeit gelöste Grundaufgabe einer Klassenkörpertheorie, nämlich die Charakterisierung der abelschen Erweiterungen L in ihrer Gesamtheit durch arithmetische Gruppen des Grundkörpers K, wurde in den letzten Jahren durch die Untersuchungen von LANG ([5a], [5b]) und SERRE [10] auch auf Funktionenkörper in mehreren Veränderlichen über einem Galoisfeld (d.h. auf Körper höherer arithmetischer Stufe) verallgemeinert und es wurde dort die Lösung der Hauptfragen einer solchen Theorie angegeben. In dieser Arbeit soll ein kleiner Beitrag zu einer entsprechenden Fragestellung für *arithmetische Funktionenkörper*, d.h. für algebraische Funktionenkörper K in einer Veränderlichen über einem endlich-algebraischen Zahlkörper k, gegeben werden. Hierbei machen wir zur Vereinfachung der Darstellung an einigen Stellen die folgenden einschränkenden Voraussetzungen[1]: a) Der Grundkörper K sei ein rationaler Funktionenkörper über einem algebraischen oder dem rationalen Zahlkörper k. — b) Es werden nur zyklische Erweiterungen (insbesondere solche vom Primzahlgrad) betrachtet. — Speziell enthalten unsere Ergebnisse also einen Beitrag zur Charakterisierung der zyklischen Erweiterungen eines rationalen Funktionenkörpers über dem rationalen Zahlkörper[2]).

Da die alleinige Zugrundelegung der Divisoren von K über k gemäß der Theorie der algebraischen Funktionen oder gleichwertige algebraisch-geometrische Begriffsbildungen ohne zusätzliche Modifikationen zur vollständigen Charakterisierung aller abelschen Erweiterungen von K nicht ausreicht (man denke z.B. an die abelschen Konstantenerweiterungen), werden hier die folgenden Überlegungen und Hilfsmittel herangezogen: 1. Jeder abelschen Erweiterung L von K werden vermöge der Primideale (endlichen Primdivisoren) $\mathfrak{p}$ von k *lokale* abelsche Erweiterungen $\overline{L}$ von Kongruenzfunktionenkörpern $\overline{K}$

[1]) Diese Vereinfachungen bezwecken insbesondere, daß wir an einigen Stellen die Komplikationen, die aus einer nichttrivialen Struktur der Divisorenklassengruppe von K über k bzw. aus der der Idealklassengruppe von k resultieren, vermeiden wollen. Soweit diese Voraussetzungen keine Vereinfachungen bringen, werden sie natürlich fortgelassen.

[2]) Dies verallgemeinert den Kroneckerschen Satz über die Charakterisierung der abelschen Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers.

(von Primzahlcharakteristik) zugeordnet; dies entspricht etwa (aber nicht vollständig) dem Übergang zur Klassenkörpertheorie im Kleinen und gestattet es, Ergebnisse aus der algebraischen Zahlentheorie und aus der Klassenkörpertheorie der Kongruenzfunktionenkörper bei den Untersuchungen zu verwenden. 2. Als Erzeugende der arithmetischen Gruppen, mit denen die abelschen Erweiterungen charakterisiert werden, wählen wir ein geeignetes System von Primdivisoren zu diskreten Krullschen Bewertungen vom Rang 2; die Restklassenkörper dieser Primdivisoren sind endliche Körper, so daß also nach dem üblichen Formalismus die Frobenius-Automorphismen erklärt werden können. Diese Primdivisoren entsprechen den primen rationalen 0-Zyklen in den Untersuchungen von LANG und SERRE. 3. Unser Ansatz lehnt sich stark an den aus der klassischen Theorie bekannten Gedanken der Kongruenzklasseneinteilung nach einem „Führer", der aus den verzweigten Primdivisoren von K zusammengesetzt ist, an; demzufolge sind in unseren Ergebnissen Aussagen über Verzweigungen enthalten und bilden sogar einen wesentlichen Punkt der Überlegungen.

INHALT. §1 enthält die Herleitung der zugeordneten lokalen abelschen Erweiterungen und die Zusammenstellung ihrer Eigenschaften, insbesondere dann, wenn eine Regularitätsvoraussetzung erfüllt ist. Die formale Aufstellung einer Divisorengruppe und ihrer „Kongruenzeinteilungen", sowie die Zusammensetzung der lokalen Eigenschaften zu globalen bilden den Inhalt von §2. In §3 wird die Beziehung zwischen abelschen Erweiterungen und Kongruenzklasseneinteilungen am Spezialfall der zyklischen Erweiterungen vom Kummerschen Typus (wenn also die entsprechenden Einheitswurzeln im Grundkörper enthalten sind) diskutiert, in §4 wird gezeigt, wie sich abelsche Konstantenerweiterungen in dieses Schema einordnen. Mit Hilfe des Begriffs des Führernormalkörpers läßt sich in §5 zeigen, daß zyklische Erweiterungen, die nicht vom Kummerschen Typus sind, relativ selten sind; sie können nur dann auftreten, wenn die verzweigten Primdivisoren in gewisser Beziehung zum Grad der Erweiterung stehen[3]). In §6 schließlich wird die Existenz zyklischer Erweiterungen von vorgegebenem Grad über einem rationalen Funktionenkörper über dem rationalen Zahlkörper nachgewiesen; einige ergänzende Bemerkungen betreffen andere, insbesondere algebraisch-geometrische Ansätze zu diesen Fragestellungen.

BEZEICHNUNGEN. Unter einem Primdivisor von K (in Zeichen: p_0, p, P, $\mathfrak{p}$, usw.) verstehen wir stets eine Klasse äquivalenter diskreter Bewertungen von K, die nicht notwendig vom Rang 1 sein müssen; die zugehörigen Bewertungen seien stets additiv geschrieben und wir denken uns unter den zum Primdivisor gehörigen Bewertungen eine als normiert ausgezeichnet; die Sprechweise „verschiedene Bewertungen" bedeute stets „inäquivalente normierte Bewertungen". Mit dem gleichen Symbol wie den Primdivisor bezeichnen wir auch das maximale Primideal des zugehörigen Bewertungsringes und den zugehörigen

[3]) Ein entsprechender Sachverhalt gilt auch bei Kongruenzfunktionenkörpern, doch ist er dort nicht so augenscheinlich, daß er hervorgehoben wird.

Resthomomorphismus (Stelle) von K; für die Resthomomorphismen verwenden wir dabei die Rechtsoperatorschreibweise, d.h. $\bar{x}=x\mathfrak{p}$ bedeute das Bild von $x\in K$ bei dem durch $\mathfrak{p}$ gelieferten Resthomomorphismus, $\bar{K}=K\mathfrak{p}$ sei der Restklassenkörper von K bei $\mathfrak{p}$ (falls keine Verwechslungen möglich sind, kennzeichnen wir Bilder und Bildmengen auch kürzer durch Überstreichen). — Divisorengruppen werden wir in Anlehnung an die Schreibweise der algebraischen Geometrie stets mit additiver Verknüpfung schreiben; wir verwenden diese Schreibweise aus Gründen der Einheitlichkeit auch bei Zahlkörperdivisoren, obgleich sie in diesem Fall wenig gebräuchlich ist.

§ 1. Zugeordnete lokale abelsche Erweiterungen und ihre Eigenschaften

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen, der den endlich-algebraischen Zahlkörper k zum genauen Konstantenkörper hat; $g=g(K/k)$ sei das Geschlecht von K. Mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots$ bezeichnen wir Primdivisoren von K zu diskreten Bewertungen des Ranges 1, die k identisch bewerten; wir nennen sie die *geometrischen Primdivisoren* von K oder Primdivisoren von K über k; sie beschreiben die Struktur von K über k gemäß der Theorie der algebraischen Funktionen. Die freie abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $\mathfrak{p}$, d.h. die Gesamtheit der Ausdrücke

$$\mathfrak{a}=\sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{p} \quad (n_{\mathfrak{p}} \text{ ganzrational, } n_{\mathfrak{p}}=0 \text{ für fast alle } \mathfrak{p}), \tag{1.1}$$

nennen wir die *geometrische Divisorengruppe* $D(K)$ von K; $D(K)$ ist K über k invariant zugeordnet und ein Element $z\neq 0$, $z\in K$ ist durch seinen (nach dem üblichen Schema erklärten) Hauptdivisor eindeutig bis auf einen Faktor aus k festgelegt. Mit $d(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir den Grad eines geometrischen Divisors.

Jede endlich-algebraische Erweiterung L von K läßt sich eindeutig in die folgenden beiden Schritte zerlegen (die Erweiterung ist separabel): 1. Eine *Konstantenerweiterung* $L_1=K\cdot k_1$, wobei k_1 der genaue Konstantenkörper von L ist; 2. eine *geometrische Erweiterung* L von L_1 mit dem gleichen Konstantenkörper k_1. Wir werden deshalb weitgehend diese beiden Fälle gesondert betrachten. — Bei einer endlich-algebraischen Erweiterung L von K besitzt ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ (formal analoge Regeln gelten auch für *alle* später vorkommenden Primdivisortypen; vgl. [*1*], [*13a, b*]) mindestens eine und höchstens endlich viele Fortsetzungen $\mathfrak{P}_\varrho$ ($\varrho=1, \ldots, r$) in L mit den Relativgraden $f_\varrho=f(\mathfrak{P}_\varrho/\mathfrak{p})$ und den Verzweigungsordnungen $e_\varrho=e(\mathfrak{P}_\varrho/\mathfrak{p})$ und es gilt

$$[L:K]=n=\sum_{\varrho=1}^{r} f_\varrho e_\varrho. \tag{1.2}$$

Ist speziell L über K galoissch mit der abelschen Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L/K)$, so sind die f_ϱ bzw. die e_ϱ alle untereinander gleich und es gilt

$$[L:K]=n=r f_\varrho e_\varrho. \tag{1.2a}$$

Bei einem beliebigen Primdivisor kann man den Restklassenrelativgrad f_ϱ noch gemäß

$$f_\varrho = f_{\varrho,s} \cdot f_{\varrho,i} \tag{1.2b}$$

als Produkt der Grade $f_{\varrho,s}$ und $f_{\varrho,i}$ des separablen und inseparablen Anteils der Restklassenkörpererweiterung darstellen. Ist im Fall einer abelschen Erweiterung L über K ein Primdivisor *separabel-träge*, d.h. $r = e_\varrho = f_{\varrho,i} = 1$, $f_\varrho = f_{\varrho,s} = n$, so ist die Restklassenkörpererweiterung ebenfalls abelsch mit zu $\mathfrak{G}(L/K)$ isomorpher Galoisgruppe (die Automorphismen sind erklärt durch die Wirkung der ursprünglichen auf die Restklassen; vgl. z.B. [*13a*], S. 290ff.).

Wir nennen einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K einen *Funktionalprimdivisor* von K über k, wenn die zugehörige Bewertung diskret vom Rang 1 ist und im Teilkörper k einen nichttrivialen Primdivisor $\mathfrak{p}_0$ induziert, so daß der Restklassenkörper $\bar{K} = K\mathfrak{p}$ transzendente Erweiterung des endlichen Körpers $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$ ist (vgl. hierzu [*4c, d, h*]); $\bar{K}$ ist dann ein Kongruenzfunktionenkörper, d.h. ein Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld. Wir nennen $\mathfrak{p}$ *regulär*, wenn gleichzeitig $\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{p}_0$ unverzweigt ist, $\bar{k}$ in $\bar{K}$ relativ algebraisch abgeschlossen ist und $g(K/k) = g(\bar{K}/\bar{k})$ gilt. Ist nun L eine geometrische Erweiterung des Grades n von K, so heiße eine Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ auf L *K-regulär*, wenn $\mathfrak{P}$ regulär in L und über K separabel-träge ist; in diesem Fall ist auch $\mathfrak{p}$ in K regulär[4]). Unter den genannten Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ gibt es, wie in [*4d, e, f*] gezeigt wurde, einen eindeutig und invariant durch $\mathfrak{P}$ gegebenen Gruppenhomomorphismus von $D(L)$ in $D(\bar{L}) = D(L\mathfrak{P})$, d.h. eine Vorschrift

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathfrak{P}} \bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}, \tag{1.3}$$

die jedem geometrischen Divisor $\mathfrak{A}$ von L eindeutig einen Bilddivisor $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ (gekennzeichnet durch Überstreichen) von $\bar{L}$ zuordnet; bei der Zuordnung (1.3) bleibt darüber hinaus der Grad eines Divisors erhalten und es werden Hauptdivisoren bzw. Differentialdivisoren von L in ebensolche von $\bar{L}$ abgebildet. Die in $D(L)$ vermöge der Conormoperation (vgl. [*2*]) kanonisch eingebettete geometrische Divisorengruppe $D(K)$ von K wird hierbei durch $\mathfrak{P}$ nach der gleichen Vorschrift abgebildet wie durch $\mathfrak{p}$; es gilt somit die formale Regel

$$\overline{\mathrm{Con}_{K|L}\,\mathfrak{a}} = \mathrm{Con}_{\bar{K}|\bar{L}}\,\bar{\mathfrak{a}}. \tag{1.3a}$$

Ist nun $\mathfrak{P}$ K-regulär in L und $\bar{x}$ eine separierende Variable für $\bar{K}$ über $\bar{k}$ und x ein Urbild von $\bar{x}$ in K, so haben $\bar{x}$ und x auch die gleichen Eigenschaften in $\bar{L}$ bzw. in L. Wir bilden nun die Differentiale $d\bar{x}$ und dx in $\bar{K}$, $\bar{L}$ bzw. K, L; für ihre Divisoren gilt

$$(dx)_L = \mathrm{Con}_{K|L}(dx)_K + \mathfrak{D}(L/K), \qquad (d\bar{x})_{\bar{L}} = \mathrm{Con}_{\bar{K}|\bar{L}}(d\bar{x})_{\bar{K}} + \bar{\mathfrak{D}}(\bar{L}/\bar{K}), \tag{1.4}$$

[4]) Vgl. hierzu [*4d*], Abschnitt 5; wenn L über K galoissch ist und $g(L/k) \geqq 2$ ist, so folgt schon aus der Regularität von $\mathfrak{P}$ die von $\mathfrak{p}$ und die separable Trägheit.

wobei $\mathfrak{D}(L/K)$ bzw. $\overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K})$ die zugehörigen Relativdifferenten sind. Da ferner

$$\overline{(d\,x)_L} = (d\,\bar{x})_{\overline{L}}, \qquad \overline{(d\,x)_K} = (d\,\bar{x})_{\overline{K}} \tag{1.4a}$$

ist, folgt wegen (1.3a) das

LEMMA 1. *Ist P K-regulär, so geht durch P-Restabbildung die Relativdifferente von L über K über in die von $\overline{L}$ über $\overline{K}$, d.h. es gilt*

$$\overline{\mathfrak{D}(L/K)} = \overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K}). \tag{1.5}$$

Ist speziell L über K abelsch vom Grade n und ist n prim zur Charakteristik p von $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$, so gehen die geometrischen Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von L, die die Relativdifferente $\mathfrak{D}(L/K)$ teilen, in diese mit dem genauen Exponenten $e-1$ ein, wobei e die relative Verzweigungsordnung ist; bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{Q}}$ geometrische Primdivisoren von $\overline{L}$[5]), so gehen die Differentenprimteiler wieder mit dem genauen Exponenten $\bar{e}-1$ ($\bar{e}$ = relative Verzweigungsordnung) in $\overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K})$ auf. Hieraus folgt nach einfacher Rechnung, daß für zwei verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{D}(L/K)$ die zugehörigen P-Bilder $\overline{\mathfrak{P}}_1$, $\overline{\mathfrak{P}}_2$ in $\overline{L}$ zueinander prime Divisoren sind.

Nennen wir den geometrischen Divisor

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K) = \sum_{\mathfrak{p} \text{ von } K} \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{p} \text{ verzweigt in } L) \tag{1.6}$$

von K den *geometrischen Führer* von L über K, so folgt aus dem soeben festgestellten Sachverhalt, daß sein P-Bild

$$\overline{\mathfrak{f}} = \overline{\mathfrak{f}(L/K)} = \overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K}) = \sum_{\bar{\mathfrak{q}} \text{ von } \overline{K}} \bar{\mathfrak{q}} \qquad (\bar{\mathfrak{q}} \text{ verzweigt in } \overline{L}) \tag{1.6a}$$

der entsprechend definierte geometrische Führer von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ ist. Da $(n, p) = 1$ vorausgesetzt war, stimmt $\overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K})$ sogar mit dem klassenkörpertheoretischen Kongruenzgruppenführer der Erweiterung $\overline{L}$ über $\overline{K}$ überein und wir erhalten

SATZ 1. *Ist L über K abelsch und geometrisch vom Grade n, P ein K-regulärer Funktionalprimdivisor von L und n prim zur Charakteristik von $k\mathfrak{p}_0$, so geht der geometrische Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ von L über K durch p-Restabbildung gemäß* (1.6a) *über in den geometrischen Führer $\overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K})$ von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ und letzterer stimmt mit dem Kongruenzgruppenführer von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ überein.*

Der hier erwähnte Begriff der Kongruenzgruppe ist dabei bekanntlich folgendermaßen erklärt: Ist $D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ die Gruppe der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen geometrischen Divisoren von $\overline{K}$ und $S(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ der Strahl modulo $\overline{\mathfrak{f}}$ von $\overline{K}$, d.h. die Gruppe der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen Hauptdivisoren $(\bar{z})$ mit $\bar{z} \equiv 1 \bmod \overline{\mathfrak{f}}$, so entspricht der abelschen Erweiterung $\overline{L}$ von $\overline{K}$ eine Kongruenzgruppe $H(\overline{L}/\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$, d.h. eine Untergruppe von $D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$, die $S(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ enthält, mit der Eigenschaft

$$D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})/H(\overline{L}/\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}}) \cong \mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K}); \tag{1.7}$$

[5]) Das P-Bild $\overline{\mathfrak{P}}$ eines Primdivisors $\mathfrak{P}$ von L braucht kein Primdivisor von $\overline{L}$ zu sein (vgl. [4d, e]); deshalb bezeichnen wir Primdivisoren von L mit dem Buchstaben $\overline{\mathfrak{Q}}$ und entsprechend Primdivisoren von K mit $\bar{\mathfrak{q}}$.

$H(\overline{L}/\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ ist hierbei nicht schon nach einem echten Teiler von $\overline{\mathfrak{f}}$ erklärbar. Der Isomorphismus (1.7) wird dabei folgendermaßen geliefert: Jedem Primdivisor $\overline{\mathfrak{q}}$ von $\overline{K}$, der prim zu $\overline{\mathfrak{f}}$ ist, wird nach bekanntem Schema (vgl. z.B. [5a, b], [10]) der Frobenius-Automorphismus $(\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K})$ zugeordnet (beachte, daß der Restklassenkörper von $\overline{\mathfrak{q}}$ endlich ist)

$$\overline{\mathfrak{q}} \to (\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K}) = \sigma \in \mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K}) \tag{1.7a}$$

und durch Produkt- bzw. Summenbildung entspricht somit jedem Divisor aus $D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ ein eindeutig bestimmter Automorphismus aus $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$; hierbei werden alle n Automorphismen geliefert und diese bestimmen die Klassen aus (1.7); die Ordnung von $(\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K})$ stimmt hierbei jeweils mit dem Relativgrad der Primteiler $\overline{\mathfrak{Q}}$ von $\overline{\mathfrak{q}}$ in $\overline{L}$ überein.

Betrachtet man nun die durch (1.7a) gelieferte Zuordnung von Automorphismen nur für die Gruppe $D^0(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen Hauptdivisoren, so ist $D^0(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ eindeutig eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ zugeordnet, nämlich die Gruppe derjenigen Automorphismen, die den Divisoren aus $D^0(\overline{K}, \overline{\mathfrak{f}})$ entsprechen. Bezeichnet $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times$ die Multiplikativgruppe des Restklassenringes modulo $\overline{\mathfrak{f}}$, so entspricht $\mathfrak{U}$ eine Klasseneinteilung in $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$ ($\overline{k}^\times$ = Multiplikativgruppe von $\overline{k}$; beachte die Definition von $S(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$), d.h. es gibt eine zu $\mathfrak{U}$ isomorphe Faktorgruppe von $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$.

Ist speziell $\overline{K} = k(\overline{x})$ rational und $\mathfrak{U}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$, so entspricht dem Invariantenkörper von $\mathfrak{U}$ eine Kongruenzklasseneinteilung von $\overline{K}$, bei der (wegen der trivialen Struktur der Divisorenklassengruppe 0-ten Grades von $\overline{K}$) der einem Divisor zugeordnete Automorphismus nur von dessen Grad abhängt[6]); infolgedessen ist der Invariantenkörper von $\mathfrak{U}$ eine Konstantenerweiterung von $\overline{K}$; falls $\overline{L}$ über $\overline{K}$ geometrisch ist, ist dies unmöglich und wir erhalten

KOROLLAR 1. *Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1 $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper, so gibt es vermöge der Kongruenzklasseneinteilung eine zu $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ isomorphe Faktorgruppe von $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$, wobei $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times$ die Multiplikativgruppe des Restklassenringes modulo $\overline{\mathfrak{f}}$ bedeutet.*

BEMERKUNG. Die obigen Ergebnisse (außer Korollar 1) gelten natürlich auch für unverzweigte geometrische Erweiterungen; dann ist der geometrische Führer formal gleich dem Einheitsdivisor zu setzen; allerdings darf dann K nicht rational sein.

Ist $\mathfrak{p}$ irgendein Funktionalprimdivisor eines arithmetischen Funktionenkörpers K und $\overline{\mathfrak{q}}$ ein Primdivisor seines Restklassenkörpers $\overline{K} = K\mathfrak{p}$, so entspricht dem geordneten Paar $(\mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{q}})$ durch Komposition (vgl. [1], [13b]) ein Primdivisor $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ zu einer diskreten Bewertung des Ranges 2 von K. Die Werte der zugehörigen Bewertung sind geordnete Paare ganzrationaler Zahlen, deren erste Komponente mit dem Wert der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Bewertung übereinstimmt (Faktorgruppenbildung in der Wertgruppe; vgl. [4b], Abschnitt 3 und [4h], §1); wir sagen $\mathfrak{p}$ sei die erste Stufe des Primdivisors $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$. Es gilt

[6]) Diese Schlußweise versagt, wenn $\overline{K}$ eine nichttriviale Divisorenklassengruppe 0-ten Grades besitzt.

nun eine eineindeutige Zuordnung

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \leftrightarrow (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}}) \tag{1.8}$$

zwischen den Primdivisoren $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ mit fester erster Stufe $\mathfrak{p}$ und den Paaren $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}})$ mit Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$; hierbei sind die zugehörigen Restklassenkörper kanonisch isomorph. Beim Übergang zu einer endlich-algebraischen Erweiterung L von K (insbesondere im abelschen Fall) gelten für $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ Zerlegungsgesetze vom in (1.2), (1.2a) geschilderten Typus. Bei abelschen Erweiterungen L, lassen sich, falls keine Verzweigung vorliegt, ebenfalls die Frobenius-Automorphismen $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K)$ nach geläufigem Schema (vgl. oben) erklären, da die Restklassenkörper der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ endlich sind.

Aus der früheren Identifikation von $\mathfrak{G}(L/K)$ und $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ bei separabelträgem $\mathfrak{P}$ folgt sofort

KOROLLAR 2. *Besitzt der Funktionalprimdivisor $\mathfrak{p}$ von K in der abelschen Erweiterung L von K eine K-reguläre oder allgemeiner eine separabel-träge Fortsetzung $\mathfrak{P}$, so stimmt das Zerlegungsgesetz eines $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in L mit dem des ihm gemäß* (1.8) *entsprechenden $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ in $L\mathfrak{P}$ überein, und bei kanonischer Identifikation der Galoisgruppen $\mathfrak{G}(L/K)$ und $\mathfrak{G}(L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p})$ gilt für die Frobenius-Automorphismen*

$$(\bar{\mathfrak{q}}, L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K). \tag{1.9}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch einige Bemerkungen zu dem Fall machen, in dem $\mathfrak{p}$ keine K-reguläre Fortsetzung in L besitzt (dies ist ein, wie wir später sehen werden, sehr selten vorkommender Ausnahmefall); der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf zyklische Erweiterungen vom Primzahlgrad q (setzen aber nicht die Regularität von $\mathfrak{p}$ voraus) und unterscheiden die folgenden Fälle:

1. $\mathfrak{p}$ *reinverzweigt in* L, *d.h.* $r = f_{\mathfrak{Q}} = 1$, $e_{\mathfrak{Q}} = q$. Dann stimmt $K\mathfrak{p}$ mit $L\mathfrak{P}$ überein und die $\bar{\mathfrak{q}}$ ändern sich nicht beim Übergang zu $L\mathfrak{P}$. Dagegen sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in L *reinverzweigt* von der Ordnung q.

2. $\mathfrak{p}$ *inseparabel-träge in* L, *d.h.* $r = e_{\mathfrak{Q}} = 1$, $f_{\mathfrak{Q}} = f_{\mathfrak{Q},i} = q$. Da $L\mathfrak{P}$ rein inseparabel vom Grade q über $K\mathfrak{p}$ ist und da der Konstantenkörper von $K\mathfrak{p}$ vollkommen ist, sind alle $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ in $L\mathfrak{P}$ reinverzweigt; somit sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ von K in L *reinverzweigt* von der Ordnung q.

3. $\mathfrak{p}$ *vollzerlegt in* L, *d.h.* $r = q$, $e_{\mathfrak{Q}} = f_{\mathfrak{Q}} = 1$. An die Stelle von $L\mathfrak{P}$ treten hier q zu $K\mathfrak{p}$ isomorphe Körper und somit sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ von K in L *vollzerlegt*, d.h. zerfallen in q Fortsetzungen; jedem $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ ist als Frobenius-Automorphismus der identische Automorphismus von $\mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet.

Auf die verbleibenden separabel-trägen aber nicht K-regulären Fälle, hier sind Konstantenerweiterungen und separabel-träge geometrische Erweiterungen mit Geschlechtsabnahme zu unterscheiden, kommen wir an späterer Stelle zurück, da sie sehr selten sind; die Frobenius-Automorphismen der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ können hier wie üblich erklärt werden. Der Fall einer separablen zyklischen Erweiterung des Grades q von $\overline{K}$, wo q die Charakteristik von $\overline{K}$ ist, wird bei uns i.a. nicht auftreten (vgl. Fußnote 11).

§ 2. Arithmetische Divisorgruppen und zugeordnete globale Kongruenzeinteilungen

Wir wollen nun einem arithmetischen Funktionenkörper K, der den endlich-algebraischen Zahlkörper k zum genauen Konstantenkörper hat, neben der geometrischen Divisorengruppe $D(K)$ noch weitere Divisorengruppen zuordnen. Dazu geben wir zunächst Vorschriften an, wie der Gesamtheit $\{\mathfrak{p}_0\}$ der endlichen Primdivisoren (Primideale) $\mathfrak{p}_0$ des Zahlkörpers k ein zugehöriges globales System $F=\{\mathfrak{p}\}$ von Funktionalprimdivisoren zugeordnet werden kann. Diese Vorschriften lauten:

Ein *globales System von Funktionalprimdivisoren* $F=\{\mathfrak{p}\}$ *von* K erfülle die folgenden Bedingungen:

(F_1) Zu jedem $\mathfrak{p}_0$ von k seien mindestens eine und höchstens endlich viele Funktionalfortsetzungen $\mathfrak{p}$ ausgewählt.

(F_2) Falls zu $\mathfrak{p}_0$ eine reguläre Funktionalfortsetzung $\mathfrak{p}$ in K existiert, so sei zu $\mathfrak{p}_0$ genau eine Funktionalfortsetzung $\mathfrak{p}$ auf K ausgewählt und diese soll regulär sein[7]).

F ist durch diese Vorschrift natürlich nicht eindeutig festgelegt, jedoch gibt es stets zu fast allen $\mathfrak{p}_0$ ein reguläres $\mathfrak{p}$ in K und für $g(K/k)\geqq 1$ ist dieses sogar eindeutig bestimmt. Falls $K=k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper ist, so gibt es zu jedem $\mathfrak{p}_0$ ein reguläres $\mathfrak{p}$, nämlich die Funktionalfortsetzung bezüglich der Transzendenten x, und wir treffen die Festsetzung:

(F_x) Falls $K=k(x)$ ist, so bestehe $F=F_x$ aus der Gesamtheit der Funktionalfortsetzungen $\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}_0$ bezüglich x.

Das System F_x besteht in diesem Fall nur aus regulären $\mathfrak{p}$ und erfüllt die Bedingungen ($F_{1,2}$); allerdings hängt es von x, d.h. von der Auszeichnung der Transzendenten, ab.

Ist nun zum Körper K ein globales Funktionalprimdivisorsystem F gegeben, so bezeichnen wir für jedes $\mathfrak{p}\in F$ mit $Q(\mathfrak{p})$ die Gesamtheit der zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$; mit $Q=Q(F)$ bezeichnen wir die Gesamtheit der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p}\in F$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})$ und nennen $Q(F)$ *das durch* F *gegebene System von arithmetischen Primdivisoren* $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ *von* K. Die mit den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(F)$ als Erzeugenden gebildete freie abelsche Gruppe, d.h. die Gesamtheit der Ausdrücke

$$(2.1)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{a}_a=\mathfrak{a}_a(F)=\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p})=\sum\limits_{\mathfrak{p}\in F}\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \\ (n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\text{ ganzrational, fast alle } n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}=0) \end{array} \right\}$$

mit komponentenweiser Erklärung der Addition, nennen wir die *erste arithmetische Divisorengruppe* $D_a^1(K;Q)=D_a^1(K;F)=D_a^1(K)$ *von* K *bezüglich* F und ihre Elemente die *arithmetischen Divisoren* 1. *Art von* K *bezüglich* F.

BEMERKUNG. Ist $K=k(x)$ und ist $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen von k, bildet man zu den beiden affinen arithmetischen Ringen $\mathfrak{o}[x]$, $\mathfrak{o}[x^{-1}]$

[7]) Man könnte die Bedingung (F_2) noch abschwächen zu einer Bedingung (F_2'), indem man die Gültigkeit der Regel nur für fast alle $\mathfrak{p}_0$ fordert; dies ist eventuell im Hinblick auf Schachtelungssätze zweckmäßig.

die zugehörige arithmetische abstrakte Mannigfaltigkeit V (vgl. etwa [8*a*, *b*, *c*]), so entsprechen die maximaldimensionalen arithmetischen Lokalitäten eineindeutig den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$. Diese Lokalitäten repräsentieren aber die Erzeugenden der (arithmetischen) rationalen 0-Zyklengruppe, womit der Zusammenhang zu den Ansätzen von Lang aufgezeigt ist.

Ist $D_a^1(K) = D_a^1(K; F)$ wie eben zu K definiert und L eine beliebige abelsche Erweiterung von K mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L/K)$, so gilt für die Primdivisoren $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$ ein Zerlegungsgesetz von dem in § 1 geschilderten Typus. Wir nennen die Menge $M = M(L/K; F)$ der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$, die beim Übergang zu L verzweigt sind, den *Träger des exakten arithmetischen Führers von L über K*; $M(L/K; F)$ ist im allgemeinen eine unendliche Menge von Primdivisoren, auf deren Struktur wir anschließend eingehen. Jedem $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F) - M(L/K; F)$ kann gemäß § 1 eindeutig ein Frobenius-Automorphismus $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K) \in \mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet werden und entsprechend zu § 1 ist jedem Divisor $\mathfrak{a}_a$ aus der Untergruppe $D_a^1(K; Q - M)$ der zu $M(L/K; F)$ fremden Divisoren aus $D_a^1(K)$ eindeutig ein Automorphismus aus $\mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet. Diese Automorphismen liefern in $D_a^1(K; Q - M)$ eine endliche Klasseneinteilung; die Einsklasse $H_a^1(L/K; Q - M)$ (ihren Divisoren ist der identische Automorphismus zugeordnet) ist eine Untergruppe und heiße die L über K zugeordnete *Kongruenzgruppe* in $D_a^1(K; F)$. Die Struktur der zugehörigen Klasseneinteilung wollen wir untersuchen.

Wir verwenden zunächst das aus [4*c*, *d*, *e*] folgende

Lemma 2. *Ist L eine geometrische Erweiterung von K, so folgt für die $\mathfrak{p} \in F$: Höchstens endlich viele $\mathfrak{p}$ sind verzweigt oder haben eine inseparable Restklassenkörpererweiterung; fast alle Fortsetzungen $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{p} \in F$ auf L sind überdies K-regulär.*

Somit bilden die Fortsetzungen $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{p} \in F$ ein System F^* von Funktionalprimdivisoren von L, das die Bedingungen (F_1), (F_2') erfüllt und wir können somit entsprechend die Gruppe $D_a^1(L; F^*)$ bilden. Die $\mathfrak{p} \in F$ lassen sich also bezüglich der Erweiterung L über K in folgende 3 Klassen einteilen:

(I) $\mathfrak{p}$ mit K-regulärer Fortsetzung in L und Charakteristik $k\mathfrak{p}$ teilt nicht $[L:K]$ (unendlich viele, fast alle),

(II) verzweigte oder inseparable $\mathfrak{p}$ (endlich viele),

(III) die restlichen $\mathfrak{p}$ (endlich viele).

Ist ferner $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$ der geometrische Führer von L über K, so nennen wir die Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$, für die $\mathfrak{p}$ entweder aus (II) oder (III) ist oder für die, falls $\mathfrak{p}$ aus (I) ist, das zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ gehörige $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ ein Teiler von $\bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ ist, den *Träger des regulären Führers von L über K* und bezeichnen sie mit $M_r(L/K; F)$. Für Funktionalprimdivisoren $\mathfrak{p}$ aus (I) oder (II) stimmen die zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in $M(L/K; F)$ und $M_r(L/K; F)$ überein; lediglich für $\mathfrak{p}$ aus (III) können wir in $M_r(L/K; F)$ zusätzliche (d.h. zu viele) $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ erfaßt haben. Wir können nun analog zu oben die Divisorengruppe $D_a^1(K; Q - M_r)$ bilden.

Ist $\mathfrak{p}$ aus (I), so stimmt die durch $\mathfrak{G}(L/K)$ gelieferte Klasseneinteilung der arithmetischen Divisoren aus $D_a^1(K; (Q-M_r)\cap Q(\mathfrak{p}))$, die also nur für $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})$ von 0 verschiedene Koeffizienten haben können, bei kanonischer Identifikation überein mit der durch $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ gelieferten Kongruenzklasseneinteilung in $D(K\mathfrak{p}, \mathfrak{f}\mathfrak{p})$; insbesondere sind also alle Automorphismen von $\mathfrak{G}(L/K)$ vertreten, d.h. wir erhalten $n=[L:K]$ verschiedene Klassen.

SATZ 2. *Jeder abelschen Erweiterung L von K entspricht vermöge der Frobenius-Automorphismen $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K)$ eine Klasseneinteilung*

$$D_a^1(K; Q-M)/H_a^1(L/K; Q-M) \tag{2.2}$$

der arithmetischen Divisorengruppe 1. Art. Ist speziell L über K geometrisch mit dem geometrischen Führer $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(L/K)$, so ist bei obiger Bedeutung von $M_r=M_r(L/K; F)$

$$D_a^1(K; Q-M_r)/H_a^1(L/K; Q-M_r)\cong\mathfrak{G}(L/K); \tag{2.3}$$

für alle $\mathfrak{p}\in F$, zu denen ein K-reguläres $\mathfrak{P}$ in L existiert, stimmt die Klasseneinteilung in $D_a^1(K; (Q-M_r)\cap Q(\mathfrak{p}))$ bei kanonischer Identifizierung mit der durch $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ in $D(K\mathfrak{p}; \mathfrak{f}\mathfrak{p})$ gelieferten überein.

Wir wollen zunächst noch einige Bemerkungen zu den verschiedenen hier eingeführten bzw. angedeuteten „Führer"-Begriffen machen. Dazu verwenden wir das

LEMMA 3. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei verschiedene ganze geometrische Divisoren von K, so gibt es unendlich viele $\mathfrak{p}\in F$, die in L K-reguläre Fortsetzungen besitzen, so daß die $\mathfrak{p}$-Bilder $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{p}$ verschieden sind*[8]).

Wenden wir dieses auf abelsche geometrische Erweiterungen mit verschiedenen geometrischen Führern an, dann sind für unendlich viele $\mathfrak{p}$ die lokal reduzierten Führer verschieden, so folgt das

KOROLLAR 1. *Geometrische abelsche Erweiterungen von K mit verschiedenen geometrischen Führern liefern verschiedene Kongruenzeinteilungen in $D_a^1(K; F)$.*

Zur Formulierung eines Eindeutigkeitssatzes verbleibt die Frage, ob verschiedene geometrische abelsche Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer (es gibt im allgemeinen jeweils unendlich viele verschiedene Erweiterungen mit gleichem geometrischen Führer) die gleiche Kongruenzeinteilung liefern können; hierauf kommen wir in den nächsten Paragraphen zurück.

Um die Gesamtheit der bei L über K verzweigten $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(F)$ genauer charakterisieren zu können, führen wir nun noch eine weitere Divisorengruppe zu K und F ein. Ein Ausdruck der Form

$$\left\{\begin{array}{c} \mathfrak{a}_a^*=\mathfrak{a}_a^*(F)=\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q}(n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2)\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p})=\sum\limits_{\mathfrak{p}\in F}\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})}(n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2)\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), \\ (n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2) \text{ geordnete Paare ganzrationaler Zahlen,} \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

[8]) Für Divisoren verschiedenen Grades ist dies klar; den verbleibenden Fall führt man auf einen rationalen Teilkörper von K zurück und kann die Behauptung durch Rechnen mit Polynomen unmittelbar bestätigen.

heißt ein *arithmetischer Divisor 2. Art von K bezüglich F*, wenn folgende Nebenbedingungen für die geordneten Koeffizientenpaare erfüllt sind:

(H) Für alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ hat $n^1_{\mathfrak{p}}$ den gleichen Wert;

(E_1) Für fast alle $\mathfrak{p} \in F$ ist $n^1_{\mathfrak{p}} = 0$;

(E_2) Für jedes $\mathfrak{p} \in F$ gibt es nur endlich viele $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ mit $n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \neq 0$;

(R) Es gibt einen geometrischen Divisor $\mathfrak{a}$ von K, so daß für fast alle regulären $\mathfrak{p} \in F$ der Divisor $\sum_{\bar{\mathfrak{q}}} n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ ist bei der Zuordnung von $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$[9].

Erklären wir die Addition der Ausdrücke (2.4) komponentenweise, wobei in den geordneten Koeffizientenpaaren ebenfalls komponentenweise addiert wird, so entsteht eine abelsche Gruppe, die *zweite arithmetische Divisorengruppe $D^2_a(K;F)$ von K bezüglich F*. Man kann zeigen (vgl. [4b]), daß man vermöge der Darstellung der Werte der zu den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ gehörigen Bewertungen von K als geordnete Paare ganzrationaler Zahlen jedem Element $x \neq 0$, $x \in K$ einen Hauptdivisor zuordnen kann, der gerade ein arithmetischer Divisor 2. Art ist. Ferner läßt sich $D^1_a(K;F)$ kanonisch isomorph in $D^2_a(K;F)$ einbetten vermöge der Zuordnung

$$(2.5) \qquad \mathfrak{a}_a = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{a}^*_a = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q} (0, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}) \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}).$$

Ist nun L über K eine geometrische abelsche Erweiterung, $\mathfrak{f}(L/K)$ ihr geometrischer Führer, so können wir ihr einen arithmetischen Divisor $\mathfrak{f}^*_a(L/K)$ 2. Art als regulären arithmetischen Führer zuordnen durch folgende Vorschrift für die geordneten Koeffizientenpaare $(n^1_{\mathfrak{p}}, n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})})$:

$$(2.6) \qquad (n^1_{\mathfrak{p}}, n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}) = \begin{cases} (1,0), & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ aus (II) oder (III) für } L \text{ über } K, \\ (0, n_{\bar{\mathfrak{q}}}), & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ aus (I) und } n_{\bar{\mathfrak{q}}} \text{ Koeffizient von } \bar{\mathfrak{q}} \text{ im} \\ & \text{lokal reduzierten Führer } \bar{\mathfrak{f}}(L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) = \mathfrak{f}\mathfrak{p}. \end{cases}$$

Dann läßt sich die Kongruenzklasseneinteilung des Satzes 2 modulo $\mathfrak{f}^*_a(L/K)$ für die $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ aus $Q - M_r$ erklären; wie dies im einzelnen aussieht, zeigen die Spezialfälle im nächsten Paragraphen.

§ 3. Zyklische Erweiterungen vom Kummerschen Typus

Es sei k ein endlich-algebraischer Zahlkörper, der die n-ten Einheitswurzeln enthält, $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen von k und $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über k. Ist L eine zyklische geometrische Erweiterung n-ten Grades von K, so ist sie gemäß [3a] vom *Kummerschen Typus*, d.h. von der Form

$$(3.1) \qquad \begin{cases} L = K(y) \quad \text{mit} \quad y^n = B \in K, \\ \text{wobei} \quad B \neq b \cdot B_0^d \quad \text{mit} \quad b \in k, \ B_0 \in K \quad \text{und} \quad d \mid n, \ d > 1; \end{cases}$$

[9] Vgl. [4b], Abschnitt 4; dort wurde bei einer entsprechenden Fragestellung die Bedingung (R) nicht mitgefordert; der hier verschärfte Divisorbegriff ist aber allgemein genug.

hierbei werden die Automorphismen aus $\mathfrak{G}(L/K)$ geliefert durch die Substitutionen

(3.1a) $\quad y \to y \cdot \varepsilon^{\nu} \qquad (\nu \bmod n,\ \varepsilon$ primitive n-te Einheitswurzel).

Das Element y in (3.1) ist natürlich nicht eindeutig bestimmt; vielmehr geht die Gesamtheit der Erzeugungen von L der Form (3.1) aus einer festen vermöge der Substitutionen

(3.2) $\quad y \to z = y^{\varkappa} \cdot B_0,\ B \to B' = B^{\varkappa} \cdot B_0^{n}$ mit $(\varkappa, n) = 1$ und $B_0 \neq 0$ aus K

hervor. Ist $\mathfrak{p}_\infty$ der geometrische Nennerprimdivisor von x in K, so läßt sich die Erzeugung durch Substitutionen (3.2) auf die *reduzierte Form*

$$(3.3) \quad B = \lambda_1 \mathfrak{p}_1 + \cdots + \lambda_r \mathfrak{p}_r - l\,\mathfrak{p}_\infty \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda_\varrho < n, \qquad l = \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho\, d(\mathfrak{p}_\varrho)$$

bringen; dabei kann zusätzlich angenommen werden, daß $B = B(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{o}[x]$ ist, das gemäß

$$(3.3a) \qquad B(x) = f_1(x)^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot f_r(x)^{\lambda_r}$$

in irreduzible Faktoren $f_\varrho(x) \in \mathfrak{o}[x]$, die den $\mathfrak{p}_\varrho$ entsprechen, zerlegt sei. Diese Darstellung (3.3) bzw. (3.3a) ist zwar für $n \neq 2$ nicht eindeutig, doch sind dann zumindest die $f_\varrho(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

In L sind genau die in (3.3) auftretenden $\mathfrak{p}_\varrho$ *verzweigt*, und zwar von der Ordnung

$$(3.4) \qquad e_\varrho = \frac{n}{d_\varrho} \quad \text{mit} \quad d_\varrho = (\lambda_\varrho, n),$$

ferner für $l \not\equiv 0 \bmod n$ auch noch $\mathfrak{p}_\infty$, und zwar von der Ordnung

$$(3.4a) \qquad e_\infty = \frac{n}{d_\infty} \quad \text{mit} \quad d_\infty = (l, n);$$

somit ist das folgende Polynom $f(x) \in \mathfrak{o}[x]$

$$(3.5) \quad f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x) \cong \mathfrak{f}(L/K) - (l + \nu)\,\mathfrak{p}_\infty, \qquad \nu = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad l \not\equiv 0 \bmod n, \\ 0 & \text{für} \quad l \equiv 0 \bmod n \end{cases}$$

in der angegebenen Weise divisoräquivalent zum geometrischen Führer $\mathfrak{f}(L/K)$.

BEMERKUNG. Ganz entsprechende formale Regeln und eine gleiche Theorie gelten auch, wenn k ein Galoisfeld ist, das die n-ten Einheitswurzeln enthält, und n prim zur Charakteristik von k ist. Ist im obigen Fall $\mathfrak{p}$ ein Funktionalprimdivisor von K, der in L eine reguläre Fortsetzung besitzt, so erhält man die Erzeugung von $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ in reduzierter Form, indem man die Größe $B(x)$ aus (3.3a) modulo $\mathfrak{p}$ reduziert, d.h. die Restklassen modulo $\mathfrak{p}_0$ der Koeffizienten von $B(x)$ bildet (beachte, daß mit K auch $K\mathfrak{p}$ die n-ten Einheitswurzeln enthält).

Es sei nun speziell k der *rationale Zahlkörper* und $n = 2$ (Kummersche Erweiterungen anderer Grade gibt es dann nicht); die $\mathfrak{p}_0$ von k entsprechen dann eineindeutig den rationalen Primzahlen p. Ordnen wir jedem geometrischen

Primdivisor $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ von $K = k(x)$ das zugehörige irreduzible Polynom $f_\mathfrak{p}(x) \in \mathfrak{o}[x]$ vom Inhalt 1 zu, dessen höchster Koeffizient positiv ist, so ist die Zuordnung

$$\mathfrak{p} \leftrightarrow f_\mathfrak{p}(x) \tag{3.6}$$

eineindeutig. Vermöge der Primzahlen p und der irreduziblen Polynome $f_\mathfrak{p}(x)$ läßt sich dann $B(x)$ aus (3.3) auf folgende durch L eindeutig bestimmte reduzierte Form bringen

$$\text{(3.6a)} \quad B(x) = a \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a = (-1)^\nu \cdot \prod\limits_{\mathfrak{p}|a} \mathfrak{p}, & a \text{ ganzrational}, \quad \nu = 0, 1; \\ f(x) = \prod\limits_{f_\mathfrak{p}|f} f_\mathfrak{p}(x) \in \mathfrak{o}[x] \text{ und vom Inhalt 1.} \end{cases}$$

Wegen (3.5) ist somit der geometrische Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ in unserem Fall stets ein geometrischer Divisor von geradem Grade. Hieraus folgt:

Lemma 4. *Die Gesamtheit der Ausdrücke* (3.6a) *entspricht eineindeutig der Gesamtheit der verschiedenen geometrischen Kummerschen Erweiterungen 2-ten Grades von $K = k(x)$, wenn k der rationale Zahlkörper ist. Der Erweiterung mit der Größe $B(x)$ aus* (3.6a) *ist gemäß* (3.5) *der geometrische Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ zugeordnet und Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer unterscheiden sich nur in der Zahl a aus* (3.6a); *umgekehrt entspricht jeder solchen quadratfreien ganzrationalen Zahl a genau eine Kummersche Erweiterung mit vorgegebenem $\mathfrak{f}(L/K)$.*

Da es unendlich viele verschiedene quadratfreie ganzrationale Zahlen a der in (3.6a) geschilderten Form gibt, gibt es somit zu vorgegebenem zulässigen geometrischen Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ unendlich viele verschiedene geometrische Erweiterungen 2-ten Grades. — Ist dagegen $\bar{k}$ ein Galoisfeld der Charakteristik $\neq 2$, so bedeutet in der (3.6a) entsprechenden Formel (dabei sind die Analoga der $f_\mathfrak{p}(x)$ auf den höchsten Koeffizienten 1 zu normieren) a ein Element aus $\bar{k}$; hier kommt es nur darauf an, ob a ein Quadrat ist oder nicht, und somit gibt es genau 2 Möglichkeiten einer Erweiterung 2-ten Grades. Wir erhalten also

Lemma 4a. *Ist $\bar{k}$ ein Galoisfeld der Charakteristik $\neq 2$ und $\bar{K}$ ein rationaler Funktionenkörper über $\bar{k}$, so gibt es zu jedem zulässigen geometrischen Führer (quadratfreier ganzer Divisor geraden Grades) genau 2 verschiedene Erweiterungen 2-ten Grades* [10]).

Bezeichnen wir nun für ein $\mathfrak{p} \in F_x$ mit $\overline{B(x)}$ die Restklasse von $B(x)$ modulo $\mathfrak{p}$, d.h. das durch Reduktion der Koeffizienten modulo der zugehörigen Primzahl aus (3.6a) entstehende Polynom aus $k\mathfrak{p}[\bar{x}]$, so gilt für das Zerlegungsverhalten der $\mathfrak{p}$ in L das folgende Kriterium:

Lemma 5. *$\mathfrak{p}$ ist in L verzweigt, wenn die zugehörige Primzahl p ein Teiler von a aus* (3.6a) *ist; $\mathfrak{p}$ ist in L zerlegt, wenn $\overline{B(x)}$ ein Quadrat in $k\mathfrak{p}[\bar{x}]$ ist;*

[10]) Dies läßt sich auch aus der Klassenkörpertheorie der Kongruenzfunktionenkörper folgern. Denn zu jedem zulässigen Führer $\bar{\mathfrak{f}}$ gibt es in $R(\bar{\mathfrak{f}})^\times/\bar{k}^\times$ genau eine Klasseneinteilung der Ordnung 2 mit dem genauen Führer $\bar{\mathfrak{f}}$; man hat dann noch die Freiheit für einen Primdivisor ungeraden Grades den Frobenius-Automorphismus willkürlich festzusetzen.

alle anderen $\mathfrak{p}$ *sind separabel-träge (bis auf eventuell* $p=2$*) in* L*, wobei ein* K*-reguläres* $\mathfrak{P}$ *dann und nur dann existiert, wenn* $\overline{f(x)}$ *ein quadratfreies Polynom gleichen Grades ist; ist dies nicht der Fall, so liefert das Produkt der in ungerader Potenz in* $\overline{f(x)}$ *aufgehenden Primfaktoren entsprechend* (3.5) *den lokalen geometrischen Führer in* $K\mathfrak{p}$*; der zur Primzahl* 2 *gehörende Primdivisor* $\mathfrak{p}$ *ist im allgemeinen inseparabel-träge, doch kann in Abweichung von der durch* $\overline{B(x)}$ *gegebenen Regel auch separable Trägheit vorliegen*[11]).

Daß Erweiterungen mit verschiedenem geometrischem Führer verschiedene Kongruenzeinteilungen in $D_a^1(K)$ liefern, wurde bereits früher gezeigt und läßt sich auch erneut aus den obigen Kriterien ablesen. Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer, bei denen sich aber in (3.6a) die Ausdrücke $\prod_{\mathfrak{p}|a} \mathfrak{p}$ unterscheiden, liefern ebenfalls verschiedene Kongruenzeinteilungen, da die Menge der verzweigten $\mathfrak{p}$ verschieden ist. Es verbleibt nun noch die Aufgabe, den Einfluß des Faktors ± 1 in (3.6a) auf die Kongruenzeinteilung zu untersuchen. Wir wollen hierzu schärfer folgendes zeigen: Bei verschiedenem a in (3.6a) unterscheiden sich die zugehörigen Kongruenzeinteilungen stets bei unendlich vielen $\mathfrak{p}$; man braucht also nicht die verzweigten Primdivisoren, d.h. den arithmetischen Führer, genau zu kennen, um die Kongruenzeinteilung zu charakterisieren, sondern es genügt die Kenntnis eines Erklärungsmoduls $\mathfrak{m}_a$, der den Führer umfaßt.

Es seien also zwei verschiedene geometrische Erweiterungen 2-ten Grades L_1 und L_2 mit dem gleichen geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, d.h. gleichem normiertem Polynom $f(x)$ in (3.6a), gegeben; dagegen seien in (3.6a) die zugehörigen Zahlen a bei beiden Erweiterungen verschieden; sie seien mit a_1 und a_2 bezeichnet. Mit F_0 bezeichnen wir die Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{p}$, die für beide Erweiterungen regulär sind, also insbesondere die Teiler von a_1 und a_2 nicht enthalten. Für $\mathfrak{p} \in F_0$ ist also die zugehörige lokale Erweiterung durch $\overline{f(x)}$ und die konstanten Faktoren $\overline{a_1} = a_1 \mathfrak{p}$ bzw. $\overline{a_2} = a_2 \mathfrak{p}$ bestimmt. Die zugehörigen lokalen Erweiterungen für $\mathfrak{p}$ sind gleich, wenn $\overline{a_1}$ und $\overline{a_2}$ gleichzeitig Quadrate bzw. Nichtquadrate in $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$ sind, sonst sind sie verschieden; sie stimmen also überein, wenn das Produkt $a_1 a_2$ quadratischer Rest modulo p (zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl) ist, und sind verschieden, wenn $a_1 a_2$ quadratischer Nichtrest modulo p ist. Nun gibt es aber (vgl. z.B. [3*b*, *c*]) bei festem $a_1 a_2$, das kein Quadrat ist, unendlich viele Primzahlen von jeder der beiden Sorten und somit auch unendlich viele $\mathfrak{p}$, für die die lokalen Kongruenzeinteilungen verschieden sind.

SATZ 3. *Ist* k *der rationale Zahlkörper und* $K = k(x)$*, so entsprechen zwei verschiedenen geometrischen zyklischen Erweiterungen* L_1 *und* L_2 *2-ten Grades von* K *verschiedene Kongruenzeinteilungen in* $D_a^1(K; F_x)$*. Sind speziell die zugehörigen geometrischen Führer gleich und ist* F_0 *die Gesamtheit der* $\mathfrak{p}$*, die in* L_1 *und in* L_2 *eine* K*-reguläre Fortsetzung haben, so gibt es unendlich viele* $\mathfrak{p} \in F_0$*,*

[11]) Zum Beispiel wird aus der globalen Gleichung $y^2 = 4x + 1$ durch Reduktion modulo 2 $\bar{y}^2 = 1$, was auf inseparable Trägheit hindeutet; vermöge der Substitution $y = 2z - 1$ erhalten wir die globale Gleichung $z^2 - z = x$, also ist 2 separabel-träge.

für die die zugehörigen lokalen Kongruenzeinteilungen modulo $\overline{\mathfrak{f}}$ *in* $K\mathfrak{p}$ *gleich sind, und unendlich viele, für die sie verschieden sind, und zwar je nachdem, ob die Zahl* $a_1 a_2$ *aus* (3.6a) *quadratischer Rest modulo* p *(zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primzahl) ist oder nicht.*

Wir können diese *Eindeutigkeitsaussage* durch eine *Existenzaussage* ergänzen, indem wir den Begriff einer zulässigen Kongruenzaussage der Ordnung 2 präzisieren. Dazu einige Bezeichnungen.

Ist $\mathfrak{f}$ ein zulässiger geometrischer Führer von K (für die Ordnung 2), d.h. ein quadratfreier ganzer geometrischer Divisor geraden Grades, und $f(x)$ das ihm gemäß (3.5), (3.6), (3.6a) zugeordnete normierte Polynom vom Inhalt 1, so bezeichnen wir mit $F(\mathfrak{f})$ die Gesamtheit der endlich vielen $\mathfrak{p}$, für die $\overline{f(x)}$ nicht regulär (d.h. quadratfrei und vom gleichen Grad wie $f(x)$) ist oder die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl $p \leqq$ Grad von $\mathfrak{f}$ ist. Ist a eine quadratfreie ganzrationale Zahl, so sei $F(a)$ die Menge der $\mathfrak{p} \in F_x$, für deren zugehörige Primzahl gilt $p \mid a$. Eine Klasseneinteilung der Ordnung 2 denken wir uns stets durch die beiden Zahlen $+1$, falls der Divisor in der Einsklasse ist, und -1, falls der Divisor in der Nebenklasse ist, entsprechend dem nichttrivialen Charakter der Galoisgruppe charakterisiert.

Definition. Eine Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung 2 in $D_a^1(K)$, d.h. in der Untergruppe der zu einem arithmetischen Divisor 2. Art fremden $\mathfrak{a}_a$, heiße *zulässig*, wenn eine endliche Menge F' von Funktionalprimdivisoren $\mathfrak{p}$ und ein zulässiger geometrischer Führer $\mathfrak{f}$ mit $F(\mathfrak{f}) \subseteqq F'$ existiert, so daß gilt:

(K_1) Für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$ stimmt die zugehörige lokale Kongruenzklasseneinteilung in $K\mathfrak{p}$ vermöge (1.8), (1.9) mit einer solchen zum genauen Führer $\overline{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ überein.

(K_2) Ist für ein festes $\mathfrak{p}_1 \in F - F'$ die lokale Kongruenzeinteilung in $K\mathfrak{p}_1$ bekannt und ist $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ ein fester geometrischer Primdivisor vom Grade 1 [12]) von K mit $\mathfrak{p}\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$, so gibt es ein ganzrationales b mit $F(b) \subseteqq F'$, so daß die Klassen der $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$ sich jeweils nur um den Wert $(b/p)\,(b/p_1)^{-1}$ (Legendre-Symbol für die zugehörigen Primzahlen) unterscheiden.

Zwei Kongruenzklasseneinteilungen in $D_a^1(K)$ heißen *gleich*, wenn die zugehörigen lokalen Einteilungen für fast alle $\mathfrak{p}$ übereinstimmen.

Nach den obigen Überlegungen ist jede Klasseneinteilung zu einer geometrischen Erweiterung 2. Grades von dieser zulässigen Form. Ist umgekehrt eine zulässige Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung 2 gegeben und sind die Größen $b, \mathfrak{f}, f(x)$ wie oben bestimmt, ist ferner c' der Wert von $f(x)$ bei $\mathfrak{p}$, so können wir durch Multiplikation von b mit dem Quadrat einer ganzrationalen Zahl (dadurch ändern sich die Werte der Legendre-Symbole nicht) ein b' der Form $b' = a' \cdot c'$ erhalten; betrachten wir nun $B'(x) = a' \cdot f(x)$ und bringen dies auf die reduzierte Form (3.6a), so hat die zugehörige Kummersche Erweiterung gerade die vorgegebene Kongruenzklasseneinteilung.

---

[12]) Die Existenz eines solchen $\mathfrak{p}$ ist wegen der zweiten Bedingung in der Definition von $F(\mathfrak{f})$ trivialerweise gesichert.

KOROLLAR 1. *Die geometrischen zyklischen Erweiterungen 2. Grades von K entsprechen umkehrbar eindeutig den verschiedenen zulässigen Kongruenzklasseneinteilungen 2. Ordnung in $D_a^1(K)$.*

An der obigen Definition, die in diesem Spezialfall zugleich einen leichten Zugang zu einem Existenzsatz liefert, sind zwei Dinge hervorzuheben: Einerseits ist es nicht notwendig, von vornherein den genauen arithmetischen Führer zu kennen, sondern es genügt die Kenntnis eines eventuell zu großen Erklärungsmoduls, und andererseits wird hier eine erste Auskunft gegeben, welcher Art die Bindung zwischen den induzierten lokalen Kongruenzeinteilungen in den $K\mathfrak{p}$ modulo der $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ ist (es gibt jeweils 2 Möglichkeiten); sie wird hier durch eine zahlentheoretische Funktion des Konstantenkörpers, nämlich durch das Legendre-Symbol, beschrieben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Struktur der zu einer Erweiterung gehörigen Klasseneinteilung natürlich von der Auswahl des Systems F_x abhängt, d.h. daß bei Auswahl eines anderen Systems (also einer anderen Transzendenten) die zur gleichen Erweiterung gehörige Klasseneinteilung anders aussehen kann; allerdings reicht ein festes System vollständig aus, um alle Erweiterungen zu charakterisieren. — Für konstruktive Zwecke nennen wir noch die folgende etwas schwächere Form des obigen Ergebnisses:

KOROLLAR 2. *Ist ein zulässiger geometrischer Führer $\mathfrak{f}$ und eine endliche Menge F'' von Primdivisoren $\mathfrak{p}$ mit $F'' \cap F(\mathfrak{f}) = \varnothing$ vorgegeben und wird für jedes $\mathfrak{p} \in F''$ eine feste Kongruenzeinteilung 2. Ordnung mit dem Führer $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ in $K\mathfrak{p}$ ausgezeichnet, so gibt es eine geometrische Erweiterung 2. Grades von K vom geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, die in den $K\mathfrak{p}$ die vorgegebenen lokalen Kongruenzeinteilungen induziert.*

Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Satzes über simultane Kongruenzen im rationalen Zahlkörper (Konstruktion von a). Natürlich ist diese Erweiterung nicht eindeutig bestimmt, denn man kann bei einem weiteren $\mathfrak{p}$ auf 2 verschiedene Weisen eine Kongruenzeinteilung vorschreiben.

Die hier geschilderten Ergebnisse lassen sich weitgehend (zumindest die Eindeutigkeitsaussage) auch auf Kummersche Erweiterungen n-ten Grades über einem Körper, der die n-ten Einheitswurzeln enthält, übertragen. Allerdings sind dabei die Überlegungen etwas komplizierter, da im Gegensatz zu (3.6a) die reduzierten Darstellungen (3.3), (3.3a) nicht mehr eineindeutig den verschiedenen Erweiterungen entsprechen (bei der gleichen Erweiterung sind verschiedene Exponentensysteme λ_ϱ möglich) und auch die Normierung der zu den $\mathfrak{p}_\varrho$ gehörigen Polynome nicht mehr in so einfacher Weise möglich ist; dies wirkt sich insbesondere auf die Herleitung eines Existenzsatzes aus. Hierauf soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

§ 4. Abelsche Konstantenerweiterungen

Es sei hier $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über einem beliebigen endlich-algebraischen Zahlkörper k; k_1 sei eine abelsche Erweiterung n-ten Grades von k und $K_1 = k_1(x)$. Dann ist auch K_1 über K abelsch vom Grade n

und bei üblicher Identifizierung der Automorphismen (Wirkung auf die Koeffizienten der rationalen Funktionen) gilt

$$\mathfrak{G}(K_1/K) \cong \mathfrak{G}(k_1/k). \tag{4.1}$$

Ist $\mathfrak{p}_0$ ein endlicher Primdivisor von k, $\mathfrak{p}$ seine Funktionalfortsetzung bezüglich x auf K, so entsprechen sich beim Übergang zu k_1 bzw. zu K_1 die Zerlegungsgesetze dieser Divisoren eineindeutig, d.h. es gilt

$$\left\{\begin{array}{c} \mathfrak{p}_0 \cong e\,\mathfrak{P}_{01} + \cdots + e\,\mathfrak{P}_{0r} \leftrightarrow \mathfrak{p} \cong e\,\mathfrak{P}_1 + \cdots + e\,\mathfrak{P}_r \\ (e = \text{Verzweigungsordnungen},\ f = \text{Relativgrade},\ n = efr) \end{array}\right\}, \tag{4.2}$$

wobei die $\mathfrak{P}_\varrho$ die Funktionalfortsetzungen der $\mathfrak{P}_{0\varrho}$ bezüglich x auf K_1 sind; den Restklassenkörpererweiterungen $k_1\mathfrak{P}_{0\varrho}$ über $k\mathfrak{p}_0$ entsprechen gemäß

$$K_1\mathfrak{P}_\varrho \cong K\mathfrak{p} \cdot k_1\mathfrak{P}_{0\varrho} \tag{4.2a}$$

die Konstantenerweiterungen der $K\mathfrak{p}$ mit den $k_1\mathfrak{P}_{0\varrho}$ über $k\mathfrak{p}_0$. Insbesondere sind genau diejenigen $\mathfrak{p}$ in K_1 verzweigt, deren zugehöriges $\mathfrak{p}_0$ in k_1 verzweigt ist. Infolgedessen ist ein $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q$ genau dann verzweigt, wenn das zugehörige $\mathfrak{p}$ verzweigt ist.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ in K_1 unverzweigt, so ist dem zugehörigen $\mathfrak{p}_0$ von k eindeutig ein Frobenius-Automorphismus $(\mathfrak{p}_0, k_1/k)$ zugeordnet und wegen (4.1) erhalten wir

$$\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{p}_0 \to \sigma_0 = (\mathfrak{p}_0, k_1/k) \leftrightarrow \sigma \in \mathfrak{G}(K_1/K). \tag{4.3}$$

Dieses σ ist zugleich erzeugender Automorphismus der zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Zerlegungsgruppe und wegen (4.3) und der Struktur der Konstantenerweiterungen von Kongruenzfunktionenkörpern ergibt sich nach einfacher Rechnung

Lemma 6. *Ist $\mathfrak{p}$ in K_1 unverzweigt, σ der gemäß (4.3) $\mathfrak{p}$ zugeordnete Automorphismus aus $\mathfrak{G}(K_1/K)$, entspricht $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ bei kanonischer Identifizierung der Primdivisor $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ vom Grade $d = d(\bar{\mathfrak{q}})$, so gilt für den Frobenius-Automorphismus von $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$*

$$(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), K_1/K) = \sigma^d. \tag{4.4}$$

Hieraus und aus der Klassenkörpertheorie der Zahlkörper folgt nun sofort

Satz 4. *Ist $K = k(x)$ und $K_1 = k_1(x)$ eine abelsche Konstantenerweiterung von K mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K_1/K)$, so hat die zugehörige Kongruenzklasseneinteilung in $D_a^1(K; F_x)$ die folgende Struktur: Abgesehen von den endlich vielen in K_1 verzweigten $\mathfrak{p}$ ist in jedem $K\mathfrak{p}$ die Kongruenzklasseneinteilung des Grades f (= Relativgrad von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$) zum Führer 1 vorgegeben, die nur vom Grad des Divisors $\bar{\mathfrak{a}}$ abhängt; ist hierbei $\mathfrak{p}$ irgendein fester geometrischer Primdivisor ersten Grades von K, so wird die globale Vorschrift dadurch festgelegt, daß $\mathfrak{p}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ der Automorphismus σ, der gemäß (4.3) dem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen $(\mathfrak{p}_0, k_1/k)$ zugeordnet ist, als Frobenius-Automorphismus zugeordnet wird. Die Klassengruppe ist isomorph zu $\mathfrak{G}(K_1/K)$.*

Diese Formulierung zeigt die Analogie zu §3, insbesondere zur Definition der zulässigen Kongruenzklasseneinteilung. Auf weitergehende Fragen (z.B.

genaue Bestimmung des Führers) gehen wir hier nicht ein, da hierbei auch die unendlichen Primstellen von k zu berücksichtigen wären. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß ähnliche Ergebnisse (zumindest für fast alle $\mathfrak{p}$) auch gelten, wenn K kein rationaler Funktionenkörper ist.

§ 5. Der Führernormalkörper

Es sei jetzt wieder k der rationale Zahlkörper und $K=k(x)$ der rationale Funktionenkörper über k; mit $\mathfrak{p}_\infty$ bezeichnen wir den geometrischen Nennerprimdivisor von x. Ist dann ein möglicher geometrischer Führer (nicht notwendig von geradem Grade) in der Form

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(\ldots/K)=\nu\,\mathfrak{p}_\infty+\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_r \qquad (\nu=0 \text{ oder } 1) \tag{5.1}$$

vorgegeben und jedem $\mathfrak{p}_\varrho$ entsprechend zu (3.6) ein normiertes irreduzibles Polynom $f_\varrho(x)\in\mathfrak{o}[x]$ vom Inhalt 1 zugeordnet, so nennen wir das Polynom

$$\mathfrak{f}\to f(x)=f_1(x)\ldots f_r(x)\in\mathfrak{o}[x] \quad \text{und vom Inhalt 1,} \tag{5.1a}$$

das $\mathfrak{f}$ zugeordnete Führerpolynom $f(x)$; durch $f(x)$ ist $\mathfrak{f}$ bis auf seinen eventuellen $\mathfrak{p}_\infty$-Anteil eindeutig bestimmt.

DEFINITION. Ist $f(x)$ gemäß (5.1a) dem möglichen Führer $\mathfrak{f}$ aus (5.1) zugeordnet, so heiße der Zerfällungskörper $N=N(\mathfrak{f})$ von $f(x)$ über k der *Führernormalkörper* zu $\mathfrak{f}$.

Wir wollen nun zeigen, daß dieser durch $\mathfrak{f}$ eindeutig bestimmte Körper $N(\mathfrak{f})$ Auskunft darüber gibt, welche zyklischen (und damit auch abelschen) Erweiterungen von K mit dem vorgegebenen Führer überhaupt möglich sind.

Ist $n>1$ eine beliebige natürliche Zahl, E_n der Körper der n-ten Einheitswurzeln, d.h. der Zerfällungskörper des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n(x)$, und $N_n(\mathfrak{f})$ der Zerfällungskörper von $\Phi_n(x)\cdot f(x)$, d.h. das Kompositum von E_n und $N(\mathfrak{f})$, so sind die drei Körper E_n, $N(\mathfrak{f})$, $N_n(\mathfrak{f})$ als Zerfällungskörper von Polynomen jeweils galoissch über dem rationalen Zahlkörper k.

Nun gilt, wie aus der Theorie der Dedekindschen Zetafunktionen algebraischer Zahlkörper (vgl. z.B. [3d]) folgt, folgende bekannte Regel: Ist Ω ein über k galoisscher Zahlkörper mit $n=[\Omega:k]$, so hat die Menge $\mathfrak{M}_\Omega$ der Primzahlen $\mathfrak{p}$, die in Ω voll zerfallen, die Dirichlet-Dichte

$$\delta(\mathfrak{M}_\Omega)=\frac{1}{n}. \tag{5.2}$$

Auf unsere obige Situation angewendet ergibt dies: Falls $E_n\nsubseteq N(\mathfrak{f})$, d.h. falls $[N(\mathfrak{f}):k]<[N_n(\mathfrak{f}):k]$, so ist

$$\delta(\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})})>\delta(\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}). \tag{5.2a}$$

Hieraus folgt: *Falls $E_n\nsubseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele Primzahlen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}\in\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})}$, $\mathfrak{p}\notin\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}$, die also in $N(\mathfrak{f})$ aber nicht in $N_n(\mathfrak{f})$ voll zerfallen.*

Andererseits weiß man (vgl. [6], S. 145), daß für fast alle $\mathfrak{p}\in\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})}$ $f(x)$ bei Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}$ und $f(x)\cdot\Phi_n(x)$. Somit folgt wegen (5.2a), daß es für $E_n\nsubseteq N(\mathfrak{f})$

unendlich viele solcher Primzahlen p gibt, daß bei Reduktion modulo p zwar $f(x)$ aber nicht $\Phi_n(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Falls aber $\Phi_n(x)$ modulo p nicht vollständig zerfällt, d.h. falls p in E_n nicht voll zerfällt, so muß nach der Theorie der Kreisteilungskörper $p \not\equiv 1 \bmod n$ sein, und wir erhalten das

Lemma 7. *Falls $E_n \not\subseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele Primzahlen $p \not\equiv 1 \bmod n$, so daß gleichzeitig $f(x)$ modulo p vollständig in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Wenn nun $f(x)$ modulo p vollständig in Linearfaktoren zerfällt und sich sein Grad dabei nicht erniedrigt (dies kann nur für endlich viele p eintreten), so ist der Restklassenring R modulo $\mathfrak{f}$ die direkte Summe von endlich vielen Galoisfeldern von p Elementen, d.h. seine Multiplikativgruppe $R^\times$ ist abelsch vom Typus $(p-1, p-1, \ldots, p-1)$. Wenn zusätzlich $p \not\equiv 1 \bmod n$ ist, d.h. $n \nmid p-1$, so gibt es keine zyklische Faktorgruppe von $R^\times$ der Ordnung n.

Zusammen mit Korollar 1 zu Satz 1 (§ 1) folgt somit

Lemma 8. *Falls $E_n \not\subseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele verschiedene $\mathfrak{p}$, für die in $K\mathfrak{p}$ keine zyklische geometrische Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung n modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ erklärbar ist.*

Gäbe es eine zyklische Erweiterung n-ten Grades von K mit dem geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, so wegen Satz 2 auch für fast alle $\mathfrak{p}$ eine modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ erklärbare Klasseneinteilung, und aus Lemma 8 folgt somit der nachstehende „Nichtexistenzsatz".

Satz 5. *Ist k der rationale Zahlkörper, $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über k, $\mathfrak{f}$ gemäß (5.1) ein möglicher geometrischer Führer und enthält der zugehörige Führernormalkörper $N(\mathfrak{f})$ nicht die n-ten Einheitswurzeln, so gibt es keine geometrische zyklische Erweiterung n-ten Grades und damit auch keine abelsche Erweiterung vom Exponenten n, die $\mathfrak{f}$ als geometrischen Führer hat.*

Hieraus folgt, daß geometrische zyklische Erweiterungen n-ten Grades höchstens zu solchen geometrischen Führern möglich sind, deren Führernormalkörper $N(\mathfrak{f})$ die n-ten Einheitswurzeln enthält; speziell für $n > 2$ sind solche Erweiterungen also relativ selten, d.h. nur zu speziellen Führern möglich. Eine analoge Aussage gilt übrigens auch für Kongruenzfunktionenkörper. Das Ergebnis zeigt ferner, daß zyklische Erweiterungen, die nicht vom Kummerschen Typus sind, in sehr enger Beziehung zu Einheitswurzeln stehen (vgl. auch den Kroneckerschen Satz über die absolut-abelschen Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers).

Da bei dem obigen Beweis an einigen Stellen recht grobe Abschätzungen verwendet wurden, ist es nicht verwunderlich, daß im Falle $E_n \subseteq N(\mathfrak{f})$ (wie einfache Beispiele zeigen) nicht bezüglich aller $\mathfrak{p}$ eine zyklische Kongruenzklasseneinteilung n-ter Ordnung modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ in $K\mathfrak{p}$ möglich sein muß. Dies liegt daran, daß $f(x)$ in irreduzible Faktoren zerlegt sein kann, von denen kein einzelner E_n oder einen Erweiterungskörper von E_n zum Zerfällungskörper hat; für $n = q =$ Primzahl müßten ja in mindestens einem Galoisfeld,

das als Komponente des Restklassenringes modulo $\mathfrak{f}$ $\mathfrak{p}$ auftritt, die q-ten Einheitswurzeln enthalten sein. Falls dagegen ein Faktor $f_\varrho(x)$ von $f(x)$ das n-te Kreisteilungspolynom ist, so ist bei fast allen $\mathfrak{p}$ eine lokale zyklische Kongruenzeinteilung der Ordnung n möglich; dies ist natürlich weniger als die Existenz einer globalen geometrischen zyklischen Erweiterung n-ten Grades zum Führer $\mathfrak{f}$ (vgl. die diesbezüglichen Bemerkungen im nächsten Paragraphen).

§ 6. Existenz zyklischer Erweiterungen von vorgegebenem Primzahlgrad, ergänzende Bemerkungen

Es sei wieder k der rationale Zahlkörper, $K=k(x)$, $q>2$ eine Primzahl und $f(x)=\Phi_q(x)$ das q-te Kreisteilungspolynom; $f(x)$ ist dann irreduzibel vom Grade $q-1$ und es gilt die geometrische Divisoräquivalenz

$$f(x)=\Phi_q(x)\cong \mathfrak{p}-(q-1)\,\mathfrak{p}_\infty, \tag{6.1}$$

wobei $\mathfrak{p}$ ein geometrischer Primdivisor des Grades $q-1$ ist. Wir setzen nun $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}$ und wollen die Existenz einer zyklischen geometrischen Erweiterung q-ten Grades von K mit dem genauen geometrischen Führer $\mathfrak{f}$ nachweisen.

Unsere Methode ist dabei analog zum Wittschen Beweisgedanken für den Existenzsatz der Klassenkörpertheorie bei Kongruenzfunktionenkörpern [*11*]: Wir adjungieren zunächst zu K die q-ten Einheitswurzeln und erhalten $K_q=E_q(x)$; K_q ist über K zyklisch vom Grade $q-1$; dabei zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_q in Primdivisoren ersten Grades

$$\mathfrak{p}\cong \mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{q-1}. \tag{6.2}$$

Sodann bilden wir eine solche zyklische geometrische Kummersche Erweiterung L_q vom q-ten Grade über K_q, daß sogar L_q noch abelsch über K ist und den genauen Führer $\mathfrak{f}$ (über K_q) hat. Dann existiert eine zyklische geometrische Erweiterung q-ten Grades L von K mit dem vorgegebenen geometrischen Führer $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}$.

Es sei ε eine feste primitive q-te Einheitswurzel und m eine feste Primitivwurzel modulo q; wir setzen ferner $s=\frac{q-1}{2}$. Dann erhält man alle primitiven q-ten Einheitswurzeln in der Form

$$\varepsilon,\ \varepsilon^m,\ \varepsilon^{m^2},\ \ldots,\ \varepsilon^{m^{q-2}} \qquad (\varepsilon^{m^{q-1}}=\varepsilon); \tag{6.3}$$

ein erzeugender Automorphismus τ und die Galoisgruppe von E_q über k bzw. von $E_q(x)$ über $k(x)$ wird vollständig beschrieben durch die Festsetzungen

$$\tau(\varepsilon)=\varepsilon^m, \qquad \tau^2,\ \ldots,\ \tau^{q-1}=1. \tag{6.3a}$$

Das Kreisteilungspolynom zerfällt in der Form

$$\Phi_q(x)=\prod_{\nu=0}^{q-2}(x-\varepsilon^{m^\nu}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}_\nu \leftrightarrow (x-\varepsilon^{m^{\nu+1}}). \tag{6.3b}$$

Wir definieren nun eine spezielle Kummersche Erweiterung L_q q-ten Grades von K_q durch die Gleichung

$$y^q = G_0(x) = \prod_{\nu=0}^{s-1}\left(\frac{x-\varepsilon^{m^\nu}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu}}}\right)^{m^{s-\nu-1}}. \tag{6.4}$$

Diese Gleichung ist zwar nicht von reduzierter Form, aber alle Linearfaktoren kommen mit einem zu q primen Exponenten vor. Infolgedessen ist L_q über K_q zyklisch vom Grade q mit dem genauen geometrischen Führer $\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{q-1}$. Ist y_1 eine feste Wurzel von (6.4), so sind die anderen Wurzeln von der Form $\varepsilon^\lambda y_1$ $(\lambda=0, 1, \ldots, q-1)$, und wir erhalten die Automorphismen von L_q über K_q durch die Festsetzungen

$$\sigma(y_1)=\varepsilon\, y_1, \qquad \sigma(\varepsilon)=\varepsilon, \qquad \sigma^2, \ldots, \sigma^q = 1. \tag{6.4a}$$

Wir betrachten nun neben $G_0(x)$ noch die Ausdrücke

$$G_\nu(x) = \tau^\nu\big(G_0(x)\big) = \tau\big(G_{\nu-1}(x)\big) \qquad (\nu=1, \ldots, q-2). \tag{6.5}$$

Für diese gelten die Beziehungen

$$G_\nu(x) = G_{\nu-1}(x)^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon^{m^{\nu-1}}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu-1}}}\right)^{-(1+m^s)} = G_{\nu-1}(x)^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon^{m^{\nu-1}}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu-1}}}\right)^{tq} \tag{6.5a}$$

für $\nu=1, \ldots, q-2$, da $-(1+m^s)=tq$ wegen $m^s \equiv -1 \bmod q$. Infolgedessen sind die Lösungen der Gleichungen

$$y^q = G_\nu(x) \qquad (\nu=1, \ldots, q-2), \tag{6.6}$$

wie aus sukzessiver Rechnung folgt, ebenfalls alles Elemente aus dem oben konstruierten Körper L_q; sie lassen sich in einfacher Weise durch y_1 ausdrücken. Bilden wir nun das Polynom

$$\prod_{\nu=0}^{q-2}\big(y^q - G_\nu(x)\big) = \prod_{\nu=0}^{q-2}\big(y^q - \tau^\nu(G_0(x))\big), \tag{6.7}$$

so liegen seine sämtlichen Wurzeln in L_q und seine Koeffizienten sind Elemente aus K; folglich ist L_q galoissche Erweiterung von K vom Grade $q(q-1)$. Wir kennen bereits die Automorphismen σ von L_q aus (6.4a). Wir betrachten den weiteren Automorphismus

$$\tau(y_1) = y_1^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t, \qquad \tau(\varepsilon)=\varepsilon^m, \tag{6.8}$$

der also in K_q schon den bekannten Automorphismus aus (6.3a) induziert. Dann liefern die Produkte $\tau^\nu\sigma^\lambda$ $(\nu=1, \ldots, q-1;\ \lambda=1, \ldots, q)$ alle Automorphismen von L_q über K. Ferner gilt

$$\sigma\tau(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon^m) = \varepsilon^m, \qquad \tau\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) = \varepsilon^m,$$

$$\sigma\tau(y_1) = \sigma\left(y_1^m\left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t\right) = \varepsilon^m y_1^m\left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t = \tau(\varepsilon)\,\tau(y_1) = \tau(\varepsilon\, y_1) = \tau\sigma(y_1)$$

und somit erhalten wir

$$\sigma\tau = \tau\sigma, \tag{6.9}$$

d.h. die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L_q/K)$ ist abelsch und somit ist die Erweiterung sogar zyklisch vom Grade $q(q-1)$. Der Invariantenkörper der Untergruppe der Ordnung $q-1$ von $\mathfrak{G}(L_q/K)$ sei mit L bezeichnet; L ist dann zyklisch und geometrisch vom Grade q über K und sein geometrischer Führer ist $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}_\infty$.

SATZ 6. *Ist k der rationale Zahlkörper, $K=k(x)$, $q>2$ eine Primzahl und $\mathfrak{f}$ der geometrische Zählerdivisor des q-ten Kreisteilungspolynoms in K, so gibt es stets geometrische zyklische Erweiterungen q-ten Grades von K, die $\mathfrak{f}$ als genauen geometrischen Führer haben.*

BEMERKUNGEN. 1. Die obigen Überlegungen sind auch mit geringen Modifikationen für einen Primzahlpotenzgrad q^n $(q>2)$ durchführbar. — 2. Man kann unendlich viele verschiedene Erweiterungen des gleichen Typus vom Grad q erhalten, indem man z.B. den Ausdruck $G_0(x)$ in (6.4) mit einem geeigneten Zahlfaktor multipliziert; außerdem gibt es natürlich noch zyklische Erweiterungen q-ten Grades von K zu anderen Führern. — 3. Unser recht speziell aussehender Ansatz (6.4) war wirklich nötig, da längst nicht jeder rationale Ausdruck aus den Linearfaktoren von $\Phi_q(x)$ in (6.4) als rechte Seite geeignet wäre; im allgemeinen ist dann die zugehörige zyklische Erweiterung von K_q entweder nicht mehr galoissch über K oder aber galoissch mit nichtabelscher Galoisgruppe.

Zum Abschluß nun noch einige allgemeine Bemerkungen zu diesen Untersuchungen. Es dürfte von Interesse sein, die Ansätze dieser Arbeit mit der von MORIKAWA in [7] gegebenen Charakterisierung der geometrischen abelschen Erweiterungen eines arithmetischen Funktionenkörpers durch zugehörige verallgemeinerte Jacobische Mannigfaltigkeiten zu vergleichen; insbesondere wäre dabei zu klären, wie sich die einschränkenden Bedingungen aus §5 in der Struktur der verallgemeinerten Jacobischen Mannigfaltigkeiten ausdrücken. — Die direkte Übertragung der Methoden von LANG und SERRE, nämlich die Verwendung algebraischer Gruppen, auf den hier vorliegenden Fall führt zu Schwierigkeiten, da in der Theorie arithmetischer Mannigfaltigkeiten zwar der Begriff der Lokalität (vgl. [8a, b, c]) nicht aber der des Punktes (die ja die Gruppenelemente liefern sollen) zur Verfügung steht; hier könnten Ansätze von YAMAZAKI [12], der algebraische Zahlkörper als algebraische „Mannigfaltigkeiten" mit einem Punktbegriff darstellte, eventuell weiterführen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die prinzipiellen Ansätze dieser Untersuchungen auch durchführbar bleiben, wenn man den Konstantenkörper k von K selbst als Kongruenzfunktionenkörper voraussetzt.

Literatur

[1] ABHYANKAR, S.: Ramification Theoretic Methods in Algebraic Geometry. Ann. of Math. Studies **43** (1959).

[2] CHEVALLEY, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Surveys **6** (1951).

[3a] HASSE, H.: Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. J. reine angew. Math. **172**, 37—54 (1934).

[3b] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951.
[3c] — Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin 1950.
[3d] — Klassenkörpertheorie. Marburg 1933.
[4a] Lamprecht, E.: Allgemeine Theorie der Gaußschen Summen in endlichen kommutativen Ringen. Math. Nachr. **9**, 149—196 (1953).
[4b] — Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper III. Math. Ann. **132**, 373—403 (1957).
[4c] — Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren. Arch. Math. **8**, 30—38 (1957).
[4d, e, f] — Restabbildungen von Divisoren. I, II, III. Arch. Math. **8**, 255—264 (1957); Arch. Math. **10**, 428—437 (1959); Arch. Math. **11**, 407—418 (1960).
[4g] — Durch Produktdarstellungen erklärte Zetafunktionen. Euler-Gedenkband 246—255 (1959).
[4h] — Invariante Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22**, 71—83 (1958).
[5a] Lang, S.: Unramified Class Field Theory over Function Fields in Several Variables. Ann. of Math. **64**, 285—325 (1956).
[5b] — Sur les séries L d'une variété algébrique. Bull. Soc. Math. de France **84**, 385—407 (1956).
[6] Mann, H.: Introduction to Algebraic Number Theory. Ohio State Univ. Press 1955.
[7] Morikawa, H.: Generalized Jacobian Varieties and Separable Abelian Extensions of Function Fields. Nagoya Math. J. **12**, 231—254 (1957).
[8a, b, c] Nagata, M.: A General Theory of Algebraic Geometry over Dedekind Domains. I, II, III. Amer. J. Math. **78**, 78—116 (1956); Amer. J. Math. **80**, 382—420 (1958); Amer. J. Math. **81**, 401—435 (1959).
[9] Schmidt, F. K.: Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. S.Ber. Erlangen **62**, 267—284 (1930).
[10] Serre, J. P.: Groupes algébriques et corps de classes. Paris 1959.
[11] Witt, E.: Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **173**, 43—51 (1935).
[12] Yamazaki, K.: On Fibre Spaces in the Algebraic Number Theory. J. Math. Soc. Japan **7**, 182—201 (1955).
[13a, b] Zariski, O., and P. Samuel: Commutative Algebra I, II. 1958, 1960.

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. April 1961)

Müller, G. H.
Math. Zeitschr. 77, 414—438 (1961)

Nicht-Standardmodelle der Zahlentheorie

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Gert H. Müller

§ 1. Was man unter einem Nicht-Standardmodell einer mathematischen Theorie zu verstehen hat, ist nicht streng festgelegt worden, und jeder Versuch, das zu tun, stößt naturgemäß auf sehr verschiedenartige Schwierigkeiten. Dieser kann man Herr werden, wenn man eine Theorie der Modelle von Theorien T, etwa innerhalb einer bestimmten Mengenlehre entwickelt, doch benötigen wir eine solche Präzisierung für das Folgende nicht; im allgemeinen lassen sich Untersuchungen über Nicht-Standardmodelle post festum in einen umfassenden mengentheoretischen Rahmen einordnen. In Anwendung auf die Zahlentheorie, insoweit diese begrifflich und hinsichtlich der Beweismittel präzisiert ist, wird man unter Nicht-Standardmodellen natürlicherweise solche verstehen, die nicht isomorph zu der inhaltlich intendierten Struktur der Zahlenreihe sind.

Zu solchen Modellen der Zahlentheorie gelangt man auf mancherlei Weise, z.B. durch das von Skolem [*14, 15, 17, 18*] entdeckte Verfahren, oder unter Anwendung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes [*1*] durch ein Verfahren von Henkin [*4*], oder auch als Folge des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes [*2*] durch die (widerspruchsfreie) Hinzunahme nicht intendierter Aussagen über die Zahlen als zusätzliche Axiome. Wie man aus der Art dieser Verfahren ersehen kann, ist es nicht möglich das Auftreten von Nicht-Standardmodellen der Zahlentheorie zu vermeiden, vorausgesetzt, daß man den Rahmen der Zahlentheorie, soweit man ihn auch fassen mag, hinsichtlich der Ausdrucks- und Beweismittel in einer intersubjektiv prüfbaren Weise festlegt. (Darunter fallen also alle axiomatischen Mengenlehren, wie auch eine präzisierte Typentheorie, soweit diese widerspruchsfrei sind, unbeschadet der Tatsache, daß innerhalb einer solchen (z.B.) Mengenlehre für einen darin abgegrenzten Begriff der Zahlenlehre ein Kategorizitätsbeweis geführt werden kann.) Der intendierte Inhalt des Zahlbegriffes ist intersubjektiv unausschöpfbar; das besagt jedoch nicht, daß er nicht stets umfassenderer Teilpräzisierungen fähig ist — im Gegenteil jede Feststellung des Nichtzureichens einer solchen Präzisierung erfolgt unter Benutzung schärferer Eigenschaften der Zahlen, die dann auch Anlaß zu einer weiterreichenden Präzisierung geben.

Wie immer, wenn es für eine Theorie verschiedene Modelle gibt, so liegt es auch im Falle der Zahlentheorie nahe, daraus Unabhängigkeits- bzw. wenigstens Unentscheidbarkeitssätze zu gewinnen; vgl. G. Kreisel [*7*], G. Kemeny [*6*]. Zweitens wird man auf diese Modelle die allgemeinen modell-

theoretischen Methoden und Begriffe anwenden, um gewisse Strukturaussagen zu erhalten. In dieser Richtung sind neuerdings eine Reihe von Arbeiten in „Infinitistic Methods" Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959, erschienen, von L. Rieger, D. Scott, R. MacDowell und E. Specker, A. Robinson, und R. L. Vaught; dort findet man auch weitere Literaturhinweise, vgl. dazu auch den Bericht von A. Mostowski [*10*]; auf die darin behandelten gruppentheoretischen Betrachtungen soll hier nicht eingegangen werden.

Für die Untersuchungen über Nicht-Standardmodelle erscheint eine detaillierte Darstellung der Skolemschen Konstruktion wünschenswert, zumal eine solche nicht vorliegt, und bei ihr die Benutzung des allgemeinen Vollständigkeitssatzes von Gödel vermieden werden kann. Nach Einführung einiger Begriffe und der Präzisierung der Systeme, auf die das Verfahren von Skolem angewandt werden soll (§2, §3) wird in §4 und §5 ein Skolem-Modell für das System Z_μ der Zahlentheorie (vgl. Hilbert-Bernays [*5*], II, p. 289ff.) aufgestellt, wobei als Gegenstandsbereich die Zahlen selbst figurieren. Mit Hilfe einer teilweisen Arithmetisierung der Beweisschritte ergeben sich zwanglos Verallgemeinerungen der Konstruktion auf umfassendere zahlentheoretische Systeme (§4, §6), und außerdem eine Präzisierung der Mittel, vermöge welcher die Konstruktion durchgeführt wird. Man gelangt damit zu einer das System Z_μ überschreitenden Abgrenzung des Zahlbegriffs, der also hier dazu dient, den durch das System Z_μ bestimmten als unzureichend zu erweisen. Auch das Henkinsche Verfahren zur Bildung von Nicht-Standardmodellen, das in §7 näher untersucht wird, erfordert eine solche Überschreitung des Systems, auf das es Anwendung findet.

Nennen wir den Bereich der konstanten Terme einer (widerspruchsfreien) vollständigen Erweiterung $\bar{Z}_\mu$ von Z_μ kurz ein Termmodell $M_{\bar{Z}_\mu}$. A. Robinson [*13*] hat auf modelltheoretischem Wege gezeigt, daß (kurz gesagt) die Skolem- und die Henkin-Modelle über $M_{\bar{Z}_\mu}$ im wesentlichen identisch sind. Dieser Tatbestand ergibt sich hier (§7) durch Betrachtung der formalen Systeme ebenfalls, und in etwas verschärfter Form. Die Skolem- und Henkin-Modelle über $M_{\bar{Z}_\mu}$ sind arithmetische Erweiterungen (vgl. A. Tarski und R. L. Vaught [*21*]) von $M_{\bar{Z}_\mu}$; unter den $\bar{Z}_\mu$ kommt natürlich auch die ω-vollständige Erweiterung (in den gleichen nichtlogischen Konstanten) von Z_μ, sie heiße $\tilde{Z}_\mu$, vor. Alle von $\tilde{Z}_\mu$ verschiedenen Systeme $\bar{Z}_\mu$ geben ebenfalls Anlaß zu Nicht-Standardmodellen, die dann natürlich keine arithmetischen Erweiterungen von $M_{\tilde{Z}_\mu}$ sind; ferner ist jedes Henkin-Modell über einem $M_{\bar{Z}_\mu}$ ($\bar{Z}_\mu$ verschieden von $\tilde{Z}_\mu$) von allen Henkin-Modellen über $M_{\tilde{Z}_\mu}$ verschieden, vgl. 7.12. — Abschließend wird eine Frage von G. Kemeny [*6*], p. 164, betreffend den Unterschied zwischen den nach Henkin und den unter Benutzung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes erzeugten Nicht-Standardmodellen beantwortet [1]).

[1]) Herrn G. Hasenjaeger, der die Arbeit im Manuskript las, danke ich herzlich für wertvolle Ratschläge, vgl. insbesondere 3.7.

§ 2. Das Skolemsche Verfahren zur Gewinnung von Nicht-Standardmodellen der Zahlentheorie erfordert die formale Festlegung der Axiomensysteme, auf die es Anwendung finden soll. Als logischer Rahmen dient (hier) der Prädikatenkalkül der ersten Stufe in einer der üblichen Formen, vgl. z.B. HILBERT-BERNAYS [5], II, Suppl. I oder A. TARSKI [20]. Als nichtlogische Konstanten (primitive oder Grund-begriffe) werden im folgenden auftreten: 1) das Individuensymbol 0 (Null), 2) das einstellige Funktionssymbol S (Nachfolger), 3) die beiden zweistelligen Funktionssymbole $+$, $\times$ (Addition, Multiplikation), 4) die beiden zweistelligen Prädikatensymbole $=$, $\leqq$ (Gleichheit, Kleiner-Gleich-Beziehung), 5) der Operator $\mu_x A(c_1, \ldots, c_n, x)$ (Minimumoperator). Für freie Variable verwenden wir die Buchstaben $a, b, c, c_0, c_1, \ldots$, für gebundene Variable (wie solche bereits im Minimumoperator vorkommen) $x, y, z, x_0, x_1, \ldots$; Formeln und Terme sind in der üblichen Weise aufgebaut mittels der Grundbegriffe, der logischen Zeichen $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (wenn ... so), $\leftrightarrow$ (genau dann, wenn), $\bigvee x$ (es gibt ein x ...), $\bigwedge x$ (für alle $x, \ldots$). Die (rekursive) Definition des Formel- und des Termbegriffs hat gemeinsam zu erfolgen wegen des Auftretens von μ-Termen. Als Mitteilungszeichen für zusammengesetzte Formeln (Terme) verwenden wir die Buchstaben $X, Y, Z, A(a, c_1), B(c_0), \ldots$ und ähnliche Angaben, bzw. $T, T(a, b, c_3), \ldots$ und ähnliche Angaben, eventuell mit Indizes.

Wir geben nun vier Axiomensysteme an, auf die sich hauptsächlich die folgenden Betrachtungen beziehen werden. (Auf Fragen der Entbehrlichkeit von Axiomen oder Grundbegriffen kommt es uns in allem Folgenden nicht an.)

System I:
2.1 $c = c$
2.2 $c_1 = c_2 \cdot \rightarrow \cdot A(c_1) \rightarrow A(c_2)$
2.3 $S c \neq 0$ ($a \neq b$ soll $\neg\, a = b$ bedeuten)
2.4 $S c_1 = S c_2 \rightarrow c_1 = c_2$
2.5 $c \neq 0 \rightarrow \bigvee x (S x = c)$ (Existenz des Vorgängers)
2.6 $A(c) \rightarrow A\left(\mu_x A(x)\right)$
2.7 $A(c) \rightarrow \mu_x A(x) \neq S c$
2.8 $\neg\, A\left(\mu_x A(x)\right) \rightarrow \mu_x A(x) = 0$.

System II: 2.1—2.8 und 2.9 $\begin{cases} c \leqq 0 \leftrightarrow c = 0 \\ c_1 \leqq S c_2 \leftrightarrow c_1 \leqq c_2 \vee c_1 = S c_2. \end{cases}$

System III: 2.1—2.8 und 2.10 $\begin{cases} c + 0 = c \\ c_1 + S c_2 = S(c_1 + c_2). \end{cases}$

System IV: 2.1—2.8, 2.10 und 2.11 $\begin{cases} c \times 0 = 0 \\ c_1 \times S c_2 = (c_1 \times c_2) + c_1. \end{cases}$

Die Axiome 2.2, 2.6, 2.7, 2.8 sind genauer als Axiomenschemata aufzufassen; sie dienen als Mitteilung für die Gesamtheit der Formeln, die durch Ersetzung von $A(c)$ durch alle formal bildbaren Formeln mit einer freien Variablen (in dem jeweils betrachteten System) entstehen. Anstelle des

Axiomenschemas 2.2 kann man mit endlich vielen eigentlichen Axiomen auskommen, die inhaltlich bezüglich der Grundbegriffe die Substitutivitätseigenschaft der Gleichheit ausdrücken, z.B. $c_1 = c_2 \to S c_1 = S c_2$; vgl. HILBERT-BERNAYS [5], I, p. 373 und 431.

In dem System I kann (vgl. HILBERT-BERNAYS [5], II, pp. 86–87) das Schema der vollständigen Induktion

2.12 $$A(0) \wedge \wedge x \big(A(x) \to A(S x)\big) \cdot \to \cdot \wedge x\, A(x)$$

hergeleitet werden, und in II erhält man mit Hilfe von 2.12 nach einigen Vorbereitungen alle bekannten Gesetze für die Relation $\leqq$ im Zusammenhang mit der Operation S. Definiert man $c_1 < c_2 \leftrightarrow c_1 \leqq c_2 \wedge c_1 \neq c_2$, dann ergibt sich insbesondere

2.13 $$c_1 < c_2 \leftrightarrow S c_1 = c_2 \vee S c_1 < c_2.$$

Anstelle von 2.7 hat man die gewohnte Form des Minimumschemas

2.14 $$A(c) \to \mu_x A(x) \leqq c,$$

die man auch in III und IV beibehalten kann, da ja die Relation $\leqq$ schon in III explizit definierbar wird, als Axiomenschema zu nehmen.

Wie bekannt, vgl. SKOLEM [16], kann man im System IV Prädikate und Funktionen, die durch sogar recht weitläufige Rekursionen eingeführt werden, explizit definieren. Das System IV würde daher nicht wesentlich verstärkt werden, wenn wir zur Einführung von Prädikaten und Funktionen gewisse Rekursionsschemata zuließen; man hätte aber eine merkliche Komplikation der Begriffe „Formel" und „Term" in Kauf zu nehmen, die hier besser vermieden wird. Wenn wir trotzdem im folgenden einige bestimmte Prädikate und Funktionen (mit eigens dafür benutzten Zeichen) als durch Rekursionen definiert annehmen oder durch explizite Angabe von Rekursionen einführen, dann soll stillschweigend vorausgesetzt werden, daß eigentlich anstelle eines solchen Prädikates (Funktion) die (der) durch die festgewählte explizite Definition bestimmte Formel (Term) gemeint ist, soweit diese Rekursionen das System IV nicht überschreiten, worauf aber jeweils hingewiesen werden soll.

Mit Hilfe des Minimumoperators ist es möglich durch den Prozeß der „symbolischen Auflösung", vgl. HILBERT-BERNAYS [5], II, p. 6ff., von Aussagen (d.h. Formeln ohne freie Variable) und von Formeln zu solchen Formeln überzugehen, die abgesehen von Minimumtermen nur freie Variable enthalten. Zur Durchführung dieses Prozesses wird zunächst eine gegebene Formel (auf eine im Prädikatenkalkul erlaubte Weise) in eine pränexe Formel, d.h. eine solche in der alle Quantoren ($\vee x$, $\wedge x$) am Anfang stehen, umgeformt. Sei beispielsweise diese (pränexe) Formel

(a) $$\wedge x_1 \vee x_2 \vee x_3 \wedge x_4 \vee x_5\, A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b),$$

worin außer den angegebenen Variablen keine weiteren vorkommen mögen. Führt man jeweils anstelle des äußeren Allquantors eine freie Variable ein

und ferner die Minimumterme:

$$\mu_{x_2} \vee x_3 \wedge x_4 \vee x_5 A(c_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b), \quad \text{abgekürzt } f(c_1, a, b),$$
$$\mu_{x_3} \wedge x_4 \vee x_5 A(c_1, f(c_1, a, b), x_3, x_4, x_5, a, b), \quad \text{abgekürzt } g(c_1, a, b),$$
$$\mu_{x_5} A(c_1, f(c_1, a, b), g(c_1, a, b), c_2, x_5, a, b), \quad \text{abgekürzt } h(c_1, c_2, a, b),$$

dann gelangt man von (a) mittels 2.6 zur Formel

(b) $$A(c_1, f(c_1, a, b), g(c_1, a, b), c_2, h(c_1, c_2, a, b), a, b),$$

und von (b) kann man natürlich mit Hilfe des Prädikatenkalküls wieder zu (a) gelangen.

Im weiteren brauchen wir noch einige Hilfsfunktionen:

Wir betrachten eine Abzählung der Zahlenpaare $\langle i, j\rangle$, $i = 0, 1, 2, \ldots, i < j$, derart, daß $\langle i, j\rangle$ vor $\langle k, l\rangle$ kommt, genau dann, wenn $j < l$ ist, oder $j = l$ und $i < k$ ist. Die Zählung der Paare möge mit 0 beginnen. In Abhängigkeit von i und j ist dann die Nummer des Paares $\langle i, j\rangle$ gegeben durch

2.15 $$s(i, j) = \frac{(j-1) \times j}{2} + i$$

und die zugehörigen Umkehrfunktionen sind

2.16 $$\begin{cases} s_1(n) = n - \dfrac{(s_2(n) - 1) \times s_2(n)}{2} \\ s_2(n) = \left[\dfrac{[\sqrt{8n+1}] + 1}{2}\right]. \end{cases}$$

Ferner sei noch (mit $\overline{sg}(0) = 1$, $\overline{sg}(Sn) = 0$)

2.17 $$q(a, b) =_{df} \overline{sg}(|a - b|);$$

offenbar gilt

2.18 $$q(a, b) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ genau dann, wenn } \begin{matrix} a \neq b \\ a = b \end{matrix}.$$

Für unsere Systeme nehmen wir Gödel-Numerierungen als gegeben an; solche können in mannigfacher Form eingeführt werden. Für uns kommt es hier nur darauf an, daß vermöge solcher Numerierungen in bekannter Weise syntaktische Eigenschaften der Systeme, auf die die Numerierung bezogen ist, durch rekursive Prädikate und Funktionen ausdrückbar werden. Soweit wir solche brauchen, werden wir sie nur inhaltlich, ihrer Bedeutung nach, definieren; das genauere, technisch aber nicht prinzipiell komplizierte Verfahren ist z.B. in HILBERT-BERNAYS [5], II ausgeführt.

Auf unsere Systeme werden wir im folgenden in zweierlei Hinsicht Bezug nehmen, einmal insofern durch sie ein gewisser Ausdrucksbereich — eine „Sprache" — festgelegt ist, zum andern insofern durch die Axiome auch ein Bereich von beweisbaren Sätzen abgegrenzt wird. Dementsprechend soll von den *Sprachen* I, II, III, IV, und von den *Systemen* I, II, III, IV, die Rede sein.

§ 3. Wir betrachten nun Gesamtheiten von einstelligen Funktionstermen $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ — im weiteren, wenn es auf die Unterscheidung nicht ankommt oder diese aus dem Zusammenhang ersichtlich ist kurz mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet —, die in den entsprechenden Sprachen I, II, III, IV mit Hilfe des Minimumoperators formal gebildet werden können. (Im Hinblick auf die später gebrauchte Gödel-Numerierung dieser Terme kann man etwa festsetzen, daß die einzige freie Variable in den Elementen von $\mathfrak{f}$ c_0 sei, und die durch μ gebundenen Variablen von außen nach innen Indizes haben, die eine gewisse Teilmenge der natürlichen Zahlen durchlaufen; wir werden hier im Text von diesen Festsetzungen nicht Gebrauch machen, aber annehmen, daß hier und in allen folgenden Fällen derartige Festlegungen, auch hinsichtlich von Kollisionen gebundener Variablen erfolgt sind.) Zu $\mathfrak{f}$ gehören die „konstanten Funktionen" etwa $\mu_x(c=c \wedge x=0^{\mathfrak{k}})$, worin $0^{\mathfrak{k}}$ der Ausdruck ist, der aus 0 durch $\mathfrak{k}$-maliges Vorsetzen von S entsteht, und auch $\mu_x\big(c=c \wedge x=\mu_y A(y)\big)$, worin $\mu_y A(y)$ ein konstanter Minimumterm ist. Sind $\mu_x A(c, x)$, $\mu_y B(c, y)$ Elemente von $\mathfrak{f}$, dann sind auch $S\mu_x A(c, x)$, $\mu_x A(c, x)+\mu_y B(c, y)$, $\mu_x A(c, x) \times \mu_y B(c, y)$, und $\mu_x A\big(\mu_y B(c, y), x\big)$ Elemente von $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{f}$ ist also gegenüber Einsetzungen von Elementen aus $\mathfrak{f}$ für die freie Variable c_0 abgeschlossen.

Die Gesamtheiten $\mathfrak{f}$ sind offenbar abzählbar. Insbesondere können wir, da die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{f}$ eine entscheidbare Eigenschaft ist, mit Hilfe unserer Gödel-Numerierungen rekursive Funktionen $\nu_{\mathrm{I}}(a)$, $\nu_{\mathrm{II}}(a)$, $\nu_{\mathrm{III}}(a)$, $\nu_{\mathrm{IV}}(a)$, — im weiteren kurz $\nu(a)$, — die die Gödel-Nummern der Elemente von $\mathfrak{f}$ aufzählen erhalten. Wir wollen von den Werten von $\nu(a)$ als den Gödel-Nummern und von den Argumenten a als den Indizes der Elemente von $\mathfrak{f}$ sprechen.

3.1 Seien a, b, Indizes von Elementen von $\mathfrak{f}$, dann gibt es, wie man aus den Regeln für den syntaktisch korrekten Aufbau zusammengesetzter Funktionsausdrücke sieht, rekursive Funktionen $\varrho(a)$, $\sigma(a, b)$, $\tau(a, b)$, die den Index des Elementes aus $\mathfrak{f}$ bestimmen, das 1) aus dem Element mit Index a durch Vorsetzen von S, und 2) aus Elementen mit Index a und b durch Dazwischensetzen der Zeichen $+$ bzw. $\times$ entsteht.

3.2 Der Index der Funktion $\mu_x(c=c \wedge x=0)$ sei $\mathfrak{n}$.

3.3 Sei $A(a)$ ein Ausdruck mit der einzigen freien Variablen a, und sei $\mathfrak{a}$ seine Gödel-Nummer; es gibt dann eine rekursive Funktion $\chi(a)$, derart, daß $\chi(\mathfrak{a})$ der Index von $\mu_x\big(c=c \wedge x=\mu_y A(y)\big)$ ist.

3.4 Sei schließlich $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ ein Ausdruck mit genau den angegebenen freien Variablen, $n \geqq 1$, und es sei $\mathfrak{b}$ seine Gödel-Nummer, dann gibt es eine rekursive Funktion $\psi(b, c_1, \ldots, c_n)$ derart, daß $\psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n)$ den Index des Elementes aus $\mathfrak{f}$ bestimmt, das aus $\mu_x B(x, c_1, \ldots, c_n)$ durch Einsetzung der Elemente von $\mathfrak{f}$ mit Indizes $c_1, \ldots, c_n$ anstelle der freien Variablen $c_1, \ldots, c_n$ entsteht. (In $A(a)$ und $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ können die Variablen a bzw. $c_1, \ldots, c_n$, natürlich an verschiedenen Stellen, z.B. auch innerhalb von μ-Termen vorkommen. Für die Einführung dieser Funktionen sind wiederum eine Reihe von Normierungen der betrachteten Ausdrücke erforderlich, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, da diese Details unerheblich sind.)

Wie bekannt sind die Systeme I, II, III vollständig, d.h. jede formal bildbare Aussage ist entweder herleitbar oder ihre Negation ist herleitbar, und da diese Systeme axiomatisierbar sind, sind sie auch entscheidbar, vgl. HILBERT-BERNAYS [5], I. Daher sind auch die Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{III}}$ als Funktionen für alle Argumente bestimmt. Diese Vollständigkeit besitzt das System IV nicht und diese kann auch durch Hinzunahme von endlich vielen oder rekursiv-aufzählbar vielen Axiomen (sofern dadurch kein Widerspruch entsteht) nicht erreicht werden; dies ist eine Konsequenz des Gödelschen Unableitbarkeitssatzes [2]. Für $\mathfrak{f}$ bedeutet dies, daß darin Funktionsterme $\mu_x B(c, x)$ auftreten werden, derart, daß die Aussage $\wedge y \vee x B(y, x)$ formal unentscheidbar ist. Ein solcher Term ist dann im System IV nicht für alle Argumente als Funktion bestimmt. Um dies für alle Elemente von $\mathfrak{f}$ zu erreichen, müssen wir das System IV vervollständigen. Dies geschieht mit Hilfe des Lindenbaumschen [19] Verfahrens:

Es sei $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der formal bildbaren Aussagen der Sprache IV und $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der beweisbaren Aussagen des Systems IV. Beiden Gesamtheiten entsprechen Mengen von Gödel-Nummern $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$; es möge $r(a)$ die Menge $\mathfrak{A}'$ aufzählen, die Elemente X von $\mathfrak{A}$ erhalten dadurch Indizes a. Wir bilden nun auf induktivem Wege eine Folge von Aussagenmengen $\mathfrak{B}_n$, derart, daß 1) $\mathfrak{B}_\omega = \Sigma \mathfrak{B}_n$ die Menge $\mathfrak{B}$ umfaßt, 2) $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsfrei ist und 3) für jedes $X_a \in \mathfrak{A}$ entweder X_a oder $\neg X_a$ Element von $\mathfrak{B}_\omega$ ist, kurz $\mathfrak{B}_\omega$ vollständig ist:

3.5
$$\begin{cases} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B}_{n+1} = \begin{cases} \mathfrak{B}_n, & \text{wenn nach Hinzunahme von } X_n \text{ zu } \mathfrak{B}_n \\ & \text{die Aussage } 0 = S0 \text{ ableitbar ist,} \\ \mathfrak{B}_n \cup X_n & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathfrak{B}_\omega = \Sigma \mathfrak{B}_n. \end{cases}$$

Es ist dann $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\omega$; wäre $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsvoll, dann müßte sich der Widerspruch schon aus endlich vielen Aussagen, etwa $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ herleiten lassen, und da $\mathfrak{B}$ als widerspruchsfrei vorausgesetzt ist, dürfen wir annehmen, daß vor der Entscheidung (gemäß 3.5) über die Hinzunahme von X_{i_r} noch kein Widerspruch ableitbar war. Dann aber könnte X_{i_r} laut 3.5 gar nicht in $\mathfrak{B}_\omega$ aufgenommen werden. Für jedes n ist also höchstens eine der Aussagen X_n oder $\neg X_n = X_m$ in $\mathfrak{B}_\omega$. Laut Konstruktion muß aber offensichtlich eine dieser Aussagen aufgenommen worden sein.

Der vorstehende Beweis der Existenz einer widerspruchsfreien vollständigen Erweiterung — sie heiße IV_ω — von IV, d.h. des Lindenbaumschen Satzes (in Anwendung auf IV) kann arithmetisiert werden, wobei man von einem Beweisprädikat für das System IV ausgeht. Sei etwa

3.6 $B(a, b)$: a ist Nummer eines Beweises in IV der Aussage mit der Nummer b.

Wie bekannt ist $B(a, b)$ ein rekursives, also gemäß unserer Vorbemerkung in §2 ein in IV explizit definierbares Prädikat, und es gilt:

3.7 $$b \in \mathfrak{B}' \leftrightarrow \vee x\, B(x, b).$$

Hinsichtlich eines Beweisprädikates $B_\omega(a, b)$ für IV_ω hat G. Hasenjaeger[2]) gezeigt, daß sich in einfacher Weise, unter Benutzung von $B(a, b)$, zwei Prädikate $A_1(a, c_1, c_2)$, $A_2(a, c_1, c_2)$ definieren lassen, derart, daß

3.8 $$b \in \mathfrak{B}'_\omega \leftrightarrow \vee x\, B_\omega(x, b) \leftrightarrow \vee y \wedge z\, A_1(b, y, z) \leftrightarrow \wedge y \vee z\, A_2(b, y, z)$$

gilt, wobei die beiden Prädikate A_1, A_2 genau dann rekursiv sind, wenn $r(a)$ rekursiv ist. Diese Funktion kann (aber muß nicht) rekursiv gewählt werden, da die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{A}$ ja eine entscheidbare Eigenschaft ist. Alle widerspruchsfreien vollständigen Erweiterungen von IV (scil. in der Sprache von IV) können durch das Lindenbaumsche Verfahren erzeugt werden, je nach der Wahl von $r(a)$, und auf Grund der Existenz unentscheidbarer Aussagen gibt es auch verschiedene vollständige Obersysteme von IV. Von diesen Obersystemen von IV wollen wir kurz als von den System IV_ω sprechen, und für das weitere ein beliebig gewähltes dieser Systeme betrachten, das dann auch kurz mit IV_ω bezeichnet werde. Unter den Systemen IV_ω kommt genau *ein* [*11*] System $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ vor, das ω-vollständig ist, d.h. daß für jede Formel $A(c)$, derart, daß $A(0), A(S0), A(SS0), \ldots$ in $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ beweisbar sind, die Aussage $\wedge x A(x)$ beweisbar ist; $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ heiße das Standardsystem in der Sprache IV; es ist dasselbe, das in der Einleitung $\widetilde{Z}_\mu$ genannt wurde.

In einem System IV_ω sind alle Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ in ihrem Wertverlauf festgelegt. Für je zwei Elemente, etwa $f(c)$ und $g(c)$ aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ lassen sich (natürlich ganz elementar) die folgenden Alternativen beweisen

3.9 $$\wedge x \vee y\big(x < y \wedge f(x) = g(x)\big) \vee \wedge x \vee y\big(x < y \wedge f(x) \neq g(x)\big)$$

3.10 $$\wedge x \vee y\big(x < y \wedge f(x) < g(x)\big) \vee \wedge x \vee y\big(x < y \wedge f(x) = g(x)\big) \wedge x \vee y\big(x < y \wedge f(x) > g(x)\big),$$

d.h. daß mindestens eine der Beziehungen $=, \neq$ bzw. $<, =, >$ unendlich oft zwischen den Werten von f und g statthat. Für eine Formel der Gestalt $\wedge x \vee y\big(x < y \wedge A(y)\big)$ schreiben wir zur Abkürzung $U y A(y)$, zu lesen: „für unendlich viele $y, \ldots$“.

Für unsere Systeme I, II, III, IV_ω führen wir nun Funktionen $v_{\mathrm{I}}(a, b)$, $v_{\mathrm{II}}(a, b)$, $v_{\mathrm{III}}(a, b)$, $v_{\mathrm{IV}_\omega}(a, b)$ — kurz $v(a, b)$ — inhaltlich durch folgende *Definition* ein: *$v(a, b)$ ist diejenige Funktion, die für das Argument b den Wert der Funktion mit Index a an der Stelle b annimmt*; kurz $v(a, b)$ ist nichts anderes als $f_a(b)$, wobei $f_a(b)$ ein Element der zu $v(a, b)$ gehörenden Gesamtheit $\mathfrak{f}$ ist. Die Funktion $v(a, b)$ kann dem System, auf das sie bezogen ist, nicht angehören;

[2]) Vgl. Hasenjaeger, G.: Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. J. Symb. Log. **18**, 41–48 (1953).

andernfalls wäre $Sv(a, a) \in \mathfrak{f}$, hätte also einen Index, etwa i, und es wäre nach Definition von $v(a, b)$: $v(i, a) = Sv(a, a)$, also nach Einsetzung von i für a $v(i, i) = Sv(i, i)$. Zu einer formalen arithmetisierten Definition von $v(a, b)$ gelangt man mit Hilfe der Erfüllbarkeitsbeziehung (vgl. A. MOSTOWSKI [9], p. 57ff.), die ihrerseits nach dem Verfahren von HILBERT-BERNAYS [5], II, pp. 330ff. arithmetisiert werden kann, wobei, (abgesehen von der Berücksichtigung der Funktion $r(a)$, durch die IV_ω bestimmt ist), das System IV überschritten wird. (Durch die Gödel-Numerierung werden die Mengen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{f}'$ der Gödel-Nummern von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{f}$ gemeinsam festgelegt. Die voneinander unabhängigen Reihenfolgen, in denen $r(a)$ $\mathfrak{A}'$ und $v(a)$ $\mathfrak{f}'$ aufzählen, können, aber müssen nicht rekursiv gewählt werden.)

§ 4. Der wesentliche Schritt der Skolemschen Modellkonstruktion besteht in der Einführung der Grundbeziehungen unserer Systeme, also von $=$ bzw. $\leqq$ in die Gesamtheiten $\mathfrak{f}$. Diese Beziehungen werden nach dem Verhalten der Elemente von $\mathfrak{f}$, d.h. also der einstelligen Funktionen im Unendlichen bestimmt. Wir führen hier die Gleichheitsbeziehung in $\mathfrak{f}$ ein; das Verfahren ist demjenigen von SKOLEM, der eine totale Ordnung in $\mathfrak{f}$ einführt, ganz analog.

Skolemsches Lemma. *Sei $f_0(c)$, $f_1(c)$, ... eine nicht leere höchstens abzählbare Folge von einstelligen zahlentheoretischen Funktionen, dann gibt es eine streng monoton wachsende Funktion $d(c)$ derart, daß für alle Paare $\langle s_1(n), s_2(n)\rangle$ die folgende (vollständige und strenge) Dichotomie gilt:*

$$\wedge x\left(x \geqq n \cdot \rightarrow \cdot f_{s_1(n)}(d(x)) = f_{s_2(n)}(d(x))\right) \vee \wedge x\left(x \geqq n \rightarrow f_{s_1(n)}(d(x)) \neq f_{s_2(n)}(d(x))\right).$$

Inhaltlich gesprochen beruht der Beweis dieses Lemmas auf einem schrittweisen Vergleichen zweier Funktionen (in der Reihenfolge unserer Paarabzählung, der die Aufzählung von $\mathfrak{f}'$ durch $v(a)$ zugrunde liegt), wobei der n-te Vergleich (der Funktionen $f_{s_1(n)}$, $f_{s_2(n)}$) auf einer unendlichen Teilmenge N_n der Menge der natürlichen Zahlen N erfolgt, auf der die vorangegangenen Funktionspaare schon in einer festen Beziehung, der Gleichheit oder der Ungleichheit stehen. Die hierfür erforderliche Bestimmung von immer neuen Teilmengen $N_i \subseteqq N$ erfolgt durch die Wertbereiche von Funktionen $g(a, b)$, $g^+(a, b)$, — g^+ spielt nur eine Hilfsrolle — die unter Verwendung des Minimumoperators durch Rekursion eingeführt werden. Dabei ist die Festlegung der Werte der Funktion $g(a, 0)$ so eingerichtet, daß gleichzeitig eine Wahl getroffen wird, welche der Beziehungen $=$ oder $\neq$ zwischen den Funktionen, die gerade verglichen werden sollen, bevorzugt wird, falls beide Fälle für unendlich viele Argumente eintreten. Die charakteristische Funktion der Gleichheit $q(a, b)$ dient technisch dazu, die einmal gewählte Beziehung festzuhalten. (Für das inhaltliche Verständnis der folgenden Rekursionen und Beweise ist es bequem, statt der Ausdrücke $v(s_1(n), x)$, $v(s_2(n), x)$ die Schreibweise $f_{s_1(n)}(x)$, $f_{s_2(n)}(x)$ zu benutzen; die nachher eingeführte Funktion $g^+(m, n)$ entspricht inhaltlich der Funktion $g(0, g(1, \ldots, g(m, n), \ldots))$. Daß wir den Beweis formal genauer durchführen, hat seinen Grund darin, daß hier eine Überschreitung der Mittel des Systems, für das das Skolemsche Modell aufgestellt werden soll, erfolgt.)

Kürzen wir den Ausdruck $q\big(r(s_1(a), b), r(s_2(a), b)\big)$ durch $q'(a, b)$ ab, und definieren wir:

4.1 $$g(0, 0) = \mu_x \big(q'(0, x) = 0 \wedge U y\,(q'(0, y) = 0) \cdot \vee \cdot$$
$$\cdot \vee \cdot q'(0, x) = 1 \wedge U y\,(q'(0, y) = 1)\big),$$
$$g(0, S n) = \mu_x \big(g(0, n) < x \wedge q'(0, x) = q'(0, g(0, 0))\big),$$

4.2 $$g^+(0, a) = g(0, a),$$
$$g^+(S m, a) = g^+\big(m, g(S m, a)\big),$$

4.3 $$g(S m, 0) = \mu_x \big(q'(S m, g^+(m, x)) = 0 \wedge U y\,(q'(S m, g^+(m, y)) = 0) \cdot \vee \cdot$$
$$\cdot \vee \cdot q'(S m, g^+(m, x)) = 1 \wedge U y\,(q'(S m, g^+(m, y)) = 1)\big),$$
$$g(S m, S n) = \mu_x \big(g(S m, n) < x \wedge q'(S m, g^+(m, x)) = q'(S m, g(S m, 0))\big).$$

Zunächst bemerkt man leicht, daß trotz der Bezugnahme auf die Funktion $g(a, b)$ in 4.2 doch eine korrekte Rekursion in 4.2 und 4.3 zusammen vorliegt, da in 4.3 die Funktion g^+ an der ersten Stelle nur für m, also gemäß 4.2 die Funktion g an der ersten Stelle nur für m benutzt wird. Wir setzen noch

4.4 $$d(c) = g^+(c, c), \quad (d\,h. = g(0, g(1, \ldots, g(c, c) \ldots)).$$

Nun folgen einige Feststellungen:

4.5 $g(m, a)$ wächst streng monoton in a, d.h. $g(m, Sa) > g(m, a)$; dies folgt aus 4.1 bis 4.3 unter Benutzung von 3.9 und den Eigenschaften des Minimumoperators.

4.6 $\wedge\, x\big(q'(m, g^+(m, x)) = q'(m, g^+(m, 0))\big)$; folgt unmittelbar aus 4.1 bis 4.3.

4.7 $g^+(a, b)$ wächst streng monoton in b, d.h. $g^+(a, Sb) > g^+(a, b)$.

Beweis mit Induktion nach a: $g^+(0, Sb) > g^+(0, b)$ folgt aus 4.2 zusammen mit 4.5; $g^+(Sk, Sb) = g^+\big(k, g(Sk, Sb)\big) > g^+\big(k, g(Sk, b)\big) = g^+(Sk, b)$, wobei die Ungleichung mit Induktion, zusammen mit Hilfe von 4.5 erhalten wird.

4.8 $d(c)$ wächst streng monoton, d.h. $d(Sc) > d(c)$.

Beweis mit Hilfe von 4.7 und 4.5 und $g(Sc, c) \geqq c$.

4.9 $$c \geqq n \to q'\big(n, d(c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big).$$

4.8 und 4.9 zusammen ergeben dann den Beweis Lemmas, da ja, inhaltlich gesprochen, zwischen

$$f_{s_1(n)}\big(g(0, g(1, \ldots, g(n, 0) \ldots))\big) \quad \text{und} \quad f_{s_2(n)}\big(g(0, g(1, \ldots, g(n, 0) \ldots))\big)$$

genau eine der Beziehungen $=$ oder $\neq$ statt haben muß, und aus 4.9 nach Auflösung der Abkürzung q' folgt, daß diese Beziehung dann für alle $c \geqq n$ auf den Werten von d erhalten bleibt.

Beweis von 4.9. Nach 4.6 haben wir

(a) $$q'\big(n, g^+(n+0, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also nach Einsetzung von n anstelle von c

$$q'\big(n, g^+(n, n)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big), \text{ also gemäß 4.4.}$$

(b) $$q'\big(n, d(n)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big).$$

Induktionsannahme:

(c) $$q'\big(n, g^+(n+k, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big);$$

setzen wir in dieser Formel $g(n+Sk, c)$ anstelle von c ein, dann hat man

$$q'\big(n, g^+(n+k, g(n+Sk, c))\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also nach 4.2

$$q'\big(n, g^+(n+Sk, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

und nach Einsetzung von $n+Sk$ anstelle von c und Benutzung von 4.4

(d) $$q'\big(n, d(n+Sk)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also mit Induktion aus (b) und (d) die Behauptung 4.9, womit das Skolemsche Lemma bewiesen ist.

Aus 4.9 zusammen mit (b) erhalten wir nach Auflösung der Abkürzung q' unter Benutzung der Bedeutung der Funktionen $s(a, b)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$:

4.10 $$c \geqq s(i, j) \to q\big(v(i, d(c)), v(j, d(c))\big) = q\big(v(i, d(s(i, j))), v(j, d(s(i, j)))\big).$$

Aus dem vorstehenden Beweis ersieht man, daß er formal für die Gesamtheiten $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ genau gleich verläuft, je nach der Wahl der Funktionen $v_{\mathrm{I}}(a, b)$, $v_{\mathrm{II}}(a, b)$, $v_{\mathrm{III}}(a, b)$, $v_{\mathrm{VI}_\omega}(a, b)$, die anstelle von $v(a, b)$ verwendet werden; natürlich ist dementsprechend auch die Funktion $d(c)$ für die verschiedenen Fälle zu unterscheiden.

Eine Erweiterung der von uns betrachteten Systeme durch Hinzunahme neuer Funktionen (mit entsprechenden, etwa Rekursionsaxiomen) berührt den Beweis des Skolemschen Lemmas nur insofern, als andere Funktionen $v(a, b)$ auftreten. Einer Erweiterung durch neue Prädikate kann man wie folgt Rechnung tragen: seien etwa $B(a)$ und $C(a, b, c)$ solche Prädikate, für die ja wieder je eine zu 3.9 analoge Alternative zur Verfügung steht. Nach Einführung (1) der neuen Funktion $v(a, b)$, (2) einer passenden Abzählung der Tripel $\langle i, j, k\rangle$ und (3) etwa der charakteristischen Funktionen für $B(a)$ und $C(a, b, c)$, führt man das neue $g(0, 0)$ etwa wie folgt ein:

$$g(0,0) = \mu_x\big(\text{„Alternative wie in 4.1“} : \wedge : B(f_0(x)) \wedge U\,y\,B(f_0(x)) \,.\vee.\, \neg B(f_0(x)) \wedge U\,y \neg B(f_0(x)) : \wedge : \text{„eine entsprechende Alternative für das Prädikat}$$

$$C(f_0(x), f_1(x), f_2(x))\text{“}\big);$$

die weiteren Rekursionsgleichungen ergeben sich in Analogie zu 4.1 bis 4.3 ohne Schwierigkeit. Als Ergebnis erhält man eine zu 4.9 analoge Formel, in der auch die neuen Beziehungen auftreten. Will man insbesondere, wie

Skolem es tat, eine totale Ordnung für die Elemente von $\mathfrak{f}$ einführen, so hat man die Rekursion mit einer dreigliedrigen Alternative unter Benutzung von 3.10 aufzustellen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Rekursionsgleichungen für die Funktion $g(a, b)$, in denen $v(a, b)$ vorkommt, als Funktion von a unter Benutzung von gebundenen Variablen an der zweiten Stelle von $g(a, b)$ formuliert sind, wobei durch den Minimumoperator mindestens zwei alternierende Quantoren auftreten.

§ 5. Für die Aufstellung eines Modells eines Systems müssen wir einen Dingbereich angeben, die Grundbegriffe des Systems in diesem erklären, und zeigen, daß die in dem System beweisbaren Sätze in dem Modell gelten.

Die folgende Konstruktion eines Skolemschen Modells für eins der Systeme IV_ω erfolgt unter Benutzung von 4.10 mit Hilfe der beiden Funktionen $v(a, b)$ und $d(c)$, — genauer $v_{\mathrm{IV}_\omega}(a, b)$ und $d_{\mathrm{IV}_\omega}(c)$, doch wollen wir auch im weiteren den Index unterdrücken. Man ersieht aus der Konstruktion sofort, daß sie für die Systeme I und III ebenso angewandt werden kann. Hinsichtlich des Systems II stehen uns zwei Wege offen: wir können in III die $\leqq$-Beziehung explizit definieren; die Axiome 2.9 werden dann in III, also auch für das Modell von III beweisbar, d.h., das Modell von III ist auch ein Modell von II. Oder wir benutzen 4.10 in der Form, wie es sich nach Einführung einer totalen Ordnung ergibt, vgl. Ende von §4, erklären dann die Kleiner- und die Gleichheitsbeziehung analog, wie dies im folgenden für die Gleichheitsbeziehung allein geschieht, und erhalten so ein Modell für II, das sich natürlich unter entsprechender Änderung der Funktionen $v(a, b)$ und $d(c)$ zu einem Modell von III, bzw. IV_ω erweitern läßt.

Die Bezeichnung „Skolemsches Modell" für unsere Modelle ist nicht ganz wörtlich zu verstehen. Skolem verwendet [*14, 15*] als Dingbereich die Elemente von $\mathfrak{f}$, während in [*18*] eine Reduktion bezüglich der Modellgleichheit vorgenommen wird, da diese im allgemeinen nicht mit der Identität zusammenfällt. Unser Dingbereich sind die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ selbst; auf die Bildung von Äquivalenzklassen kommen wir in §6 noch zurück. Inhaltlich gesprochen beruht die Wahl der Zahlen als Dingbereich auf der durch $v(a)$ gegebenen Abzählung der Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$, also auf der Benutzung der Indizes zusammen mit den Funktionen $v(a, b)$ und $d(c)$.

Wir greifen nun auf die in 3.1 bis 3.4 eingeführten Funktionen zurück. Auf Grund der Definition von $v(a, b)$ (vgl. 3.11) und der Bedeutung von $\varrho(a), \sigma(a, b), \tau(a, b), \chi(a), \psi(b, c_1, \ldots, c_n)$ ergeben sich unmittelbar die folgenden Transformationsgleichungen:

5.1
$$\begin{cases} v(\mathfrak{n}, c) = 0 \\ v\big(\varrho(a), c\big) = S\,v(a, c) \\ v\big(\sigma(a, b), c\big) = v(a, c) + v(b, c) \\ v\big(\tau(a, b), c\big) = v(a, c) \times v(b, c) \\ v\big(\chi(\mathfrak{a}), c\big) = \mu_x A(x) \\ v\big(\psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n), c\big) = \mu_x B\big(x, v(c_1, c), \ldots, v(c_n, c)\big), \end{cases}$$

worin in den letzten beiden Gleichungen $\mathfrak{a}$ die Gödel-Nummer von $A(a)$ bzw. $\mathfrak{b}$ die Gödel-Nummer von $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ ist, und diese Gleichungen genauer als ein Schema für die Gesamtheit aller Gleichungen auszufassen sind, die entstehen, indem man $A(a)$ und $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ alle syntaktisch korrekten Formeln dieser Gestalt, $n = 1, 2, \ldots$ aus der Sprache IV durchlaufen läßt. $\mathfrak{n}$ und die Werte von $\varrho(a)$, $\sigma(a, b)$, $\tau(a, b)$, $\chi(a)$, $\psi(b, c_1, \ldots, c_n)$ — wir nennen diese Funktionen im weiteren kurz die „Indexfunktionen" — sind Indizes von Elementen aus $\mathfrak{f}_{IV}$; in den letzten beiden Fällen müssen allerdings a bzw. b Gödel-Nummern geeigneter Ausdrücke sein, was man übrigens auch durch einige Hilfsfunktionen von vornherein erzwingen hätte können.

Nun schreiten wir zur Erklärung eines Modells, — es möge S_{IV_ω} heißen — für ein System IV_ω.

5.2 Dingbereich N; als freie (gebundene) Variable verwenden wir dieselben Buchstaben wie sie für IV gebraucht werden. Mitteilungszeichen für Formeln und Terme sind $\bar{A}(a, c) \ldots$ bzw. $\bar{T}(c_1, \ldots) \ldots$ ganz analog wie in §2, nur überstrichen.

5.3 Definition der Grundbegriffe. Für die Angabe dieser Definitionen verwenden wir hier als Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ und als Gleichheitszeichen $\doteqdot$. Es handelt sich bei diesen Angaben formal um explizite Definitionen in einem erweiterten zahlentheoretischen System, vgl. §6, so daß wir de jure die alten Zeichen verwenden dürften; die Änderung ist eine Konzession an die leichtere Lesbarkeit.

1) $a \sim b \Leftrightarrow \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to v(a, d(y)) = v(b, d(y))\right)$,

2) $\bar{0} \doteqdot \mathfrak{n}$,

3) $\bar{S}\, a \doteqdot \varrho(a)$,

4) $a \mathbin{\bar{+}} b \doteqdot \sigma(a, b)$,

5) $a \mathbin{\bar{\times}} b \doteqdot \tau(a, b)$,

sei $A(a)$ eine Formel, die keine andere freie Variable außer a enthält, mit der Gödel-Nummer $\mathfrak{a}$:

6) $\bar{\mu}_x \bar{A}(x) \doteqdot \chi(\mathfrak{a})$,

sei $B(a, c_1, \ldots, c_n)$, $n \geqq 1$ eine Formel mit genau den angegebenen Variablen; mit der Gödel-Nummer $\mathfrak{b}$:

7) $\bar{\mu}_x \bar{B}(x, c_1, \ldots, c_n) \doteqdot \psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n)$.

In 5.3, 6), 7) gehen $\bar{A}(c)$ bzw. $\bar{B}(a, c_1, \ldots, c_n)$ aus $A(a)$ bzw. $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ dadurch hervor, daß in formaler Weise alle Grundbegriffe von IV durch die entsprechenden neuen Begriffe nach 5.3 ersetzt werden. Wir wollen in so einem Fall kurz sagen, daß etwa $\bar{A}(a)$ aus $A(a)$ „durch Überstreichung" hervorgeht; vgl. dazu noch 5.6. Die beiden letzten Definitionen 6), 7) sind genauer Definitionsschemata, analog, wie die beiden letzten Transformationsgleichungen 5.1

Aus 5.3; 1) — 7), zusammen mit den Erklärungen der Indexfunktionen 3.1 bis 3.4 erkennt man, daß für jeden Term $\bar{T}$ bzw. $\bar{T}(c_1, \ldots, c_n)$ ein Ausdruck t,

bzw. $t(c_1, \ldots, c_n)$, aufgebaut mittels der Indexfunktionen und eventuell bestimmter Gödel-Nummern, gefunden werden kann, der im Sinne der Definitionen 5.3 den Termen T bzw. $\overline{T}(c_1, \ldots, c_n)$ entspricht; wir wollen t bzw. $t(c_1, \ldots, c_n)$ die den Termen $\overline{T}$ bzw. $\overline{T}(c_1, \ldots, c_n)$ „entsprechenden" Terme nennen. Zum Beispiel entspricht dem Term $a \overline{\wedge} \overline{S}\left(\overline{\mu}_x\left(\overline{B}(x, b)\right)\right)$, falls $\mathfrak{b}$ die Gödel-Nummer von $B(a, c)$ ist, $\tau\left(a, \varrho\left(\psi(\mathfrak{b}, b)\right)\right)$, und dem Term $\overline{\mu}_v \overline{A}\left(x, \overline{\mu}_y \overline{B}(x, y)\right)$, falls $\mathfrak{a}^*$ die Gödel-Nummer von $A^*(a) \leftrightarrow_{Df} A\left(a, \mu_y B(a, y)\right)$ ist, $\chi(\mathfrak{a}^*)$.

Hinsichtlich der Einsetzungen für die freien Variablen in den Definitionen 5.3 ist zu beachten: 1) Es werden auf beiden Seiten der Definitionen 5.3 für eine Variable Ausdrücke aus IV eingesetzt; $S(17)$ z.B. ist dann der Index des Funktionsterms aus $\mathfrak{f}$, der durch Vorsetzen von S vor den Funktionsterm mit dem Index 17 entsteht. 2) Es werden auf den linken Seiten der Definitionen 5.3 „überstrichene Ausdrücke", d.h. in unserem Modell erklärte Terme eingesetzt; auf der rechten Seite hat man dann (an den in Betracht kommenden Stellen) die „entsprechenden" Ausdrücke einzusetzen. Zum Beispiel ist $\overline{S}(a \mp b) \div \varrho\left(\sigma(a, b)\right)$.

5.4 Nachweis der Gleichheitseigenschaften:

$a \sim a$, $a \sim b \to b \sim a$ folgen sofort aus 5.3 unter Benutzung der entsprechenden Sätze für die Gleichheit in IV_ω.

$$a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und 5.3 haben wir ein n und ein m, so daß $\wedge y\left(y \geqq n \to \nu(a, d(y)) = \nu(b, d(y))\right)$ und analog für m, mit b und c anstelle von a und b; also folgt

$$\wedge y\left(y \geqq \max(n, m) \to \nu(a, d(y)) = \nu(c, d(y))\right), \quad \text{d.h.} \quad a \sim c.$$

Wenn bei dem Aufbau unserer Systeme das Gleichheitsschema 2.2 zugunsten von endlich vielen Substitutionsaxiomen vermieden wurde, dann lassen sich diese Axiome in ganz elementarer Weise übertragen; auf den Beweis des Gleichheitsschemas kommen wir noch zurück.

5.5 Um im folgenden das Auftreten von negierten Ausdrücken zu berücksichtigen, führen wir in Ergänzung zu 5.3 noch folgende Definition ein:

$$a \nsim b \Leftrightarrow \vee x \wedge y\left(y \geqq x \to \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))\right).$$

Wir haben dann zu zeigen:

5.6 $$\neg\, a \sim b \leftrightarrow a \nsim b.$$

Beweis. Sei $a \nsim b$, d.h. wir haben ein n, so daß $\wedge y\left(y \geqq n \to \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))\right)$. Sei nun $l < n$, dann gibt es ein x, nämlich n, so daß $\nu\left(a, d(n)\right) \neq \nu\left(b, d(n)\right)$; ist $l \geqq n$, dann gilt nach Voraussetzung $\nu\left(a, d(l)\right) \neq \nu\left(b, d(l)\right)$, d.h.

(a) $$\wedge x \vee y\left(y \geqq x \wedge \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))\right), \quad \text{d.h.} \quad \neg\, a \sim b.$$

Sei umgekehrt $\neg a \sim b$ und sei $e \geqq s(a, b)$ ein solches gemäß (a) existierendes y, daß $v(a, d(c)) \neq v(b, d(c))$ ist, dann folgt aus 4.10 $\wedge y(y \geqq e \to v(a, d(y)) \neq v(b, d(y)))$, d.h. nach 5.5 $a \nsim b$.

In den nach 5.3 genannten Prozeß der „Überstreichung" beziehen wir auch die Verwendung der Definition 5.5 ein, was natürlich keine wesentliche Änderung dieses Prozesses bedeutet.

5.7 Nachweis der Gültigkeit der Axiome 2.3, 2.4, 2.10, 2.11 für unser Modell: unter Benutzung der entsprechenden Axiome aus IV_ω — angewandt auf Ausdrücke die mittels $v(a, b)$ und $d(c)$ aufgebaut sind — der Transformationsgleichungen 5.1 und der Definitionen 5.3 und 5.5 ergeben sich die gewünschten Beweise ganz direkt, z.B.

$$a \mp \bar{S} b \sim \bar{S}(a \mp b).$$

Beweis.

$a + Sb = S(a + b)$, also $v(a, d(c)) + Sv(b, d(c)) = S(v(a, d(c)) + v(b, d(c)))$,

also mit 5.1

$$v(\sigma(a, \varrho(b)), d(c)) = v(\varrho(\sigma(a, b)), d(c)),$$

also

$$\vee x \wedge y(y \geqq x \to v(\sigma(a, \varrho(b)), d(y)) = v(\varrho(\sigma(a, b)), d(c))),$$

also mit 5.3 $\sigma(a, \varrho(b)) \sim \varrho(\sigma(a, b))$, also wieder mit 5.3 die Behauptung.

5.8 Nachweis des Axioms 2.5

$$a \nsim 0 \to \vee x(\bar{S} x \sim a).$$

Beweis. Kürzen wir $a = 0 \vee Sc = a$ durch $B(c, a)$ ab; die Gödel-Nummer von $B(c, a)$ sei $\mathfrak{b}$. 2.5 lautet äquivalent $a = 0 \vee \vee x(Sx = a)$ also nach symbolischer Auflösung $a = 0 \vee S\mu_x B(x, a) = a$.

Sei $a = 0$, dann erhält man sofort $a \sim \bar{0}$, also $a \sim \bar{0} \vee \vee x(\bar{S} x \sim a)$.

Sei $S\mu_x B(x, a) = a$, dann hat man $S\mu_x B(x, v(a, d(c))) = v(a, d(c))$, also mit 5.1 $v(\varrho(\psi(\mathfrak{b}, a)), d(c)) = v(a, d(c))$, also nach Vorsetzen von $\vee x \wedge y(y \geqq x \to \ldots$ und Anwendungen von 5.3, 1) und danach von 5.3, 2)—7)

$$\bar{S}\bar{\mu}_x(a \sim \bar{0} \vee \bar{S} x \sim a) \sim a,$$

also $\vee x(\bar{S} x \sim a)$, also $a \sim \bar{0} \vee \vee x(\bar{S} x \sim a)$, d.h. in beiden Fällen der Alternative erhalten wir die Behauptung.

Über die Behandlung der Axiome 2.9 (die dem System IV ja nicht angehören) wurde schon gesprochen. Wir haben nun noch die Gültigkeit der Axiomenschemata 2.2, 2.6, 2.7, 2.8 nachzuweisen und ein allgemeines Verfahren anzugeben, um von beweisbaren Sätzen eines Systems IV_ω zum Nachweis dieser Sätze für das zugehörige Modell zu gelangen. (Dieses Verfahren macht natürlich die Einzelnachweise der Axiome und Axiomenschemata prinzipiell überflüssig, doch wird durch die Beispiele das allgemeine Verfahren durchsichtiger.)

Wir beweisen zunächst das folgende Lemma:

5.9 *Es sei* $A(c_1, \ldots, c_n)$, $n \geqq 1$ *eine quantorenfreie Formel, mit genau den angegebenen freien Variablen. (A kann natürlich* μ*-Terme enthalten.)* $\bar{A}(c_1, \ldots, c_n)$ *gehe aus* $A(c_1, \ldots, c_n)$ *durch Überstreichung hervor. Dann gilt*

$$\bar{A}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A\left(v(c_1, d(y)), \ldots, v(c_n, d(y))\right)\right).$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $n = 1$. $A(c)$ ist aus Konjunktionen und Disjunktionen von Gleichungen und Ungleichungen zwischen Termen $T_1(c), T_2(c), \ldots$ aufgebaut. Der Beweis erfolgt mit Induktion nach dem Aufbau der Formel $\bar{A}(c)$.

1) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{T_1(c) = T_2(c)}$. Mit Hilfe von 5.3 findet man zu $\overline{T_1}(c)$, $\overline{T_2}(c)$ die „entsprechenden Terme" $t_1(c)$, $t_2(c)$ und vermöge 5.3, 1) (bzw. 5.5) erhält man $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to v(t_1(c), d(y)) = v(t_2(c), d(y))\right)$, also mittels 5.1 $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to T_1(v(c, d(y))) = T_2(v(c, d(y)))\right)$, d.h. $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right)$. Dieser Weg ist offenbar auch in der umgekehrten Richtung gültig.

2) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{A_1(c) \vee A_2(c)}$, d.h. $\bar{A}_1(c) \vee \bar{A}_2(c)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

(a) $$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y)))\right) \vee \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_2(v(c, d(y)))\right).$$

Aus dem ersten *und* dem zweiten Disjunktionsglied von (a) erhalten wir durch Abschwächung der Folgerungen in den Hintergliedern der Implikationen

(b) $$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y))) \vee A_2(v(c, d(y)))\right),$$

d.h.

$$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right).$$

Umgekehrt erhält man aus (b) die Formel (a) unter Verwendung der aussagenlogischen Identität $X \to (Y \vee Z) \cdot \to \cdot (X \to Y) \vee (X \to Z)$ nach Auflösung der Quantoren und nachheriger Wiedereinführung zurück.

3) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{A_1(c) \wedge A_2(c)}$, d.h. $\bar{A}_1(c) \wedge \bar{A}_2(c)$, dann erhält man

(c) $$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y)))\right) \wedge \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_2(v(c, d(y)))\right).$$

Seien hier n, m die laut (c) existierenden unteren Schranken, dann erhalten wir mit $\max(n, m)$ und nachheriger Wiedereinführung des Existenzquantors

(d) $$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y))) \wedge A_2(v(c, d(y)))\right),$$

d.h.

$$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right).$$

Umgekehrt gelangt man von (d) mit Hilfe der Identität $X \to (Y \wedge Z) \cdot \to \cdot (X \to Y) \wedge (X \to Z)$, analog wie in 2) hier zu (c) zurück. Durch den vorstehenden Beweis sind die Formeln $\bar{A}(c)$ der Form $\neg \bar{A}_1(c)$ d.h. $\neg \bar{A}_1(c)$ mitberücksichtigt, da ja die äußere Negation nach den Regeln der Bildung des Gegenteils nach innen bis zu den Primformeln hineingezogen werden kann. Hierbei wird übrigens 5.6 benutzt.

Hinsichtlich der Einsetzungen in 5.9 gilt das bereits nach 5.3 allgemein gesagte. Sei $\overline{T}$ ein Term und t der entsprechende Term, dann folgt speziell aus 5.9

5.10 $$\bar{A}(\overline{T}) \Leftrightarrow \vee x \wedge y \big(y \geqq x \to A\,(v(t, d\,(y)))\big).$$

Eine weitere Folgerung aus 5.9 ergibt sich mittels der Gleichheit von $\neg \bar{A}(c)$ und $\overline{\neg A}(c)$:

5.11 $$\wedge x \vee y \big(y \geqq x \wedge A(v(c, d\,(y)))\big) \leftrightarrow \vee x \wedge y \big(y \geqq x \to A(v(c, d\,(y)))\big).$$

Beweis. $\neg \overline{\neg A}(c)$ ist nach 5.9 mit der linken Seite von 5.11 äquivalent und $\overline{\neg \neg A}(c)$ mit der rechten Seite von 5.11. — Hierbei besagt die Implikation von links nach rechts, daß aus der Gültigkeit von $A\big(v(c, d\,(a))\big)$ für unendlich viele a auf die Gültigkeit von $A\big(v(c, d\,(a))\big)$ für alle a ab einer gewissen Stelle geschlossen werden darf. (Natürlich läßt sich 5.11 auch direkt mit Hilfe von 4.10 analog wie 5.6 beweisen; man hat nur beim Beweis von links nach rechts mit Hilfe einer Maximumbildung über die Paarnummern der auftretenden „entsprechenden" Terme eine dem e im Beweis von 5.6 analoge Schranke zu bilden.)

5.12 Kehren wir nun zum Nachweis der Gültigkeit der Axiome von IV_ω zurück. Es sei eine Formel $A(c_1, \ldots, c_n)$, die auch gebundene Variable enthalten mag, als *beweisbare* Formel in IV_ω gegeben. Durch symbolische Auflösung gehe diese Formel in $B(c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_{n+k})$ über. Daraus erhalten wir durch Einsetzung leicht

$$\vee x \wedge y \big(y \geqq x \to B\,(v(c_1, d\,(y)), \ldots, v(c_{n+k}, d\,(y)))\big),$$

also nach 5.9 $\overline{B}(c_1, \ldots, c_{n+k})$; durch prädikatenlogische Schlüsse gelangt man davon zu der Formel $\bar{A}(c_1, \ldots, c_n)$.

Insbesondere ergibt sich so der Nachweis der Axiomenschemata 2.2, 2.6, 2.7, 2.8, die im Modell lauten:

$$a \sim b \cdot \to \cdot \bar{A}(a) \to \bar{A}(b),$$

$$\bar{A}(a) \to \bar{A}\big(\bar{\mu}_x \bar{A}(x)\big),$$

$$\bar{A}(a) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(x) \dashv \bar{S}\,a, \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}(a) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(x) \prec \bar{S}\,a,$$

(mit sinngemäßer Definition von $a \prec b$),

$$\neg \bar{A}\big(\bar{\mu}_x \bar{A}(x)\big) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(y) \sim \bar{0},$$

wie auch derjenige von 2.12, das übergeht in

$$\bar{A}(\bar{0}) \wedge \wedge z\big(\bar{A}(z) \to \bar{A}(\bar{S}\,z)\big) \to \wedge y\, \bar{A}(y).$$

Damit ist die Modellkonstruktion von S_{IV_ω} und der Nachweis der Gültigkeit der beweisbaren Sätze von IV_ω für das Modell abgeschlossen.

§ 6. 6.1 Wie aus den Schlußbemerkungen von § 4 und der vorstehenden Modellkonstruktion ersichtlich ist, läßt sich ein Skolem-Modell auf diese Weise auch für Systeme der Zahlentheorie gewinnen, die aus IV, bzw. IV_ω durch Hinzunahme weiterer Grundbegriffe und der zugehörigen Axiome, nach entsprechender Erweiterung der Bedeutung der Axiomenschemata, entstehen. Man vervollständigt diese Systeme analog wie in 3.5, führt dann die zugehörigen Funktionen $r(a, b)$ und $d(c)$ wie in § 4 ein, und hat dann die Definitionen 5.3 bzw. 5.5 in naheliegender Weise zu ergänzen. Solche erweiterte Systeme der Zahlentheorie ergeben sich insbesondere durch Hinzunahme (zu IV) von Prädikaten, die gemäß der Schemata von H. Wang [22] und J. Myhill [12] gebildet werden.

6.2 Das dem Modell S_{IV_ω} entsprechende formale System, das durch Überstreichung aus IV_ω hervorgeht, ist offensichtlich widerspruchsfrei und vollständig. (Dem Aussagenpaar $\bar{X}$ und $\neg \bar{X}$ entspricht das Aussagenpaar X und $\neg X$ aus IV_ω; eine dieser Aussagen ist in IV_ω beweisbar, also auch die entsprechende überstrichene Aussage.

6.3 Wir haben mehrfach auf Stellen hingewiesen, an denen die Ausdrucks- und Beweismittel des Systems IV_ω bei unserer Konstruktion überschritten wurden. Dazu gehörte die Definition von $r(a, b)$, zusammen mit der Definition von $g(a, b)$. Von diesen Funktionen wurde für Einsetzungen und bei Induktionen in § 4 und § 5 Gebrauch gemacht. Sei V das zahlentheoretische System, das aus einem System IV_ω durch Hinzunahme (im Sinne von 6.1) von $r(a, b)$ und der damit definierten Funktion $g(a, b)$ hervorgeht. Die Aufstellung von S_{IV_ω} und der zugehörige Nachweis der Modelleigenschaften geschieht in V in der Weise, daß wir darin vermöge expliziter Definitionen Begriffe einführen, für die in V die Axiome von IV_ω beweisbar sind. (Dabei sind die Funktionen $r(a)$ und $v(a)$ nicht berücksichtigt.)

6.4 Die Gleichheitsbeziehung in S_{IV_ω} ist eine Äquivalenzbeziehung, jedoch nicht die Identität, wie man ja sofort an den verschieden numerierten Elementen aus $\mathfrak{f}$: $\mu_x(c = c \wedge x = S0)$, $S\mu_x(c = c \wedge x = 0)$ ersieht. Um zu einem hinsichtlich der Gleichheit $\sim$ reduzierten Modell $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ zu gelangen, führen wir die folgenden (nicht rekursiven) Funktionen ein:

6.5 $$k(a) =_{Df} \mu_z \vee x \wedge y\big(y \geqq x \to v(z, d(y)) = v(a, d(y))\big)$$

6.6 $$\begin{cases} l(0) = \mu_x \vee y\big(x = k(y)\big) \\ l(Sn) = \mu_x\big(l(n) < x \wedge \vee y(x = k(y))\big); \end{cases}$$

$k(a)$ ist der kleinste Index in der durch a vermöge $\sim$ bestimmten Äquivalenzklasse und $l(a)$ zählt diese kleinsten Indizes der Größe nach auf. Behält man nun die Definitionen 5.3 bei und bildet mit Hilfe von k aus unseren Indexfunktionen z.B. $\varrho(a)$ neue Funktionen z.B. $\varrho^*(a) = k\big(\varrho(a)\big)$, dann ergibt sich aus S_{IV_ω} ein hinsichtlich $\sim$ reduziertes Modell $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, dessen Dingbereich der Wertbereich von k ist. Ersetzt man 5.3, 1) durch

$$a \approx b \Leftrightarrow \vee x \wedge y\big(y \geqq x \to v(l(a), d(y)) = v(l(b), d(y))\big)$$

und führt anstelle der Funktionen z.B. $\varrho(a)$ usw. neue Funktionen z.B. $\varrho^{**}(a) = l^{-1}\left(k(\varrho(a))\right)$ usw. ein, dann erhält man ein bezüglich $\sim$ reduziertes Modell $S^{**}_{\mathrm{IV}_\omega}$, dessen Dingbereich wieder N ist.

6.7 Die Gesamtheit der konstanten Terme der Sprache IV, — sie heiße $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ wird erst durch die Bildung eines Systems IV_ω analog wie $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ insofern festgelegt, daß für jedes Element von $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ die Gleichheits- bzw. Ungleichheitsbeziehungen zu den anderen Elementen von $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ bestimmt sind. Nun bildet $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ in natürlicher Weise ein Modell für IV_ω. (Der formale Beweis dafür überschreitet natürlich das System IV_ω.) Dieses Modell nennen wir das (bezüglich der Gleichheit) „nicht reduzierte Termmodell" M_{IV_ω} von IV_ω. Wählt man aus den vermöge der Modellgleichheit von M_{IV_ω} bestimmten Äquivalenzklassen z.B. das Element mit der kleinsten Gödel-Nummer, bzw. wenn eine Ziffer $S \ldots S0$ darin vorkommt, diese als Repräsentanten, dann erhält man ein Modell $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, das wir das „reduzierte Termmodell" von IV_ω nennen wollen.

Jedes Element von M_{IV_ω} und von $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ etwa $\mu_x A(x)$ läßt sich in IV_ω durch eine Einzigkeitsaussage der Art $E(a) \wedge \wedge x\left(E(x) \to x = a\right)$, worin $E(c) \leftrightarrow_{Df} A(c) \wedge \wedge y\left(A(y) \to c \leqq y\right)$ ist, kennzeichnen, d.h. M_{IV_ω} und $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind im Sinne von A. ROBINSON [13] Primmodelle (bezüglich der Sprache IV). Selbstverständlich läßt sich umgekehrt jede Kennzeichnung eines Elementes a durch eine Formel ohne μ-Terme auch durch einen μ-Term erreichen. Der folgende Isomorphiesatz entspricht dem von A. ROBINSON l.c. auf modelltheoretischem Wege bewiesenen Satz 2.10:

6.8 *Zwei (z.B. nichtreduzierte) Termmodelle L, M in denen für zwei Aussagen $X, \neg X$ (der Sprache IV) die eine oder die andere in beiden Modellen gilt, sind isomorph.*

Beweis. Man hat in L und M nach Voraussetzung über die Gültigkeit von Aussagen in L und M dieselben Terme und unter ihnen dieselben Gleichheitsbeziehungen. (Das Fehlen eines entsprechenden Elementes oder einer zugehörigen Kennzeichnung würde sich ja sofort in Sätzen, die in einem Modell gelten, im andern nicht, bemerkbar machen.)

6.9 *S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind nicht isomorph mit M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$.* Definiert man z.B. (diese Definition gehört nicht dem System IV_ω an)

$$6.10 \qquad \mathrm{Const}(a) \leftrightarrow \vee x \wedge y\left(v_{\mathrm{IV}_\omega}(a, y) = x\right),$$

d.h. daß a Index einer konstanten Funktion ist. Nun bildet der Bereich der einstelligen konstanten Funktionen von IV_ω ein zu M_{IV_ω} (bzw. nach Reduktion zu $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$) isomorphes Modell $\bar{M}_{\mathrm{IV}_\omega}$ bzw. $\bar{M}^*_{\mathrm{IV}_\omega}$. Sei nun der Index von $\mu_x(c = x)$ etwa $\mathfrak{k}$, dann hat man offensichtlich

$$6.11 \qquad \mathrm{Const}(a) \to a \nsim \mathfrak{k},$$

d.h. S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ enthält Elemente, die von allen Elementen aus $\bar{M}_{\mathrm{IV}_\omega}$ bzw. $\bar{M}^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ verschieden sind. Diese Nichtisomorphie etwa zwischen $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ und $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ gilt insbesondere für das (reduzierte) Standardmodell $M^*_{\mathfrak{N}_{\mathrm{IV}_\omega}}$. Somit folgt speziell der folgende Skolemsche Satz:

6.12 *Auch durch Hinzunahme von abzählbar vielen Aussagen der Sprache* IV *zu den Axiomen von* IV, — *Aussagen, die alle im Sinn der intendierten Zahlvorstellung „wahr" sind, — kann die Zahlenreihe nicht charakterisiert werden. Dabei ist die Bezugnahme auf eine Sprache wesentlich, nicht aber um welche es sich handelt, soweit sie nur präzisiert ist.*

Also auch die Erweiterung der Sprache IV durch die in 6.1 genannten Prädikate berührt den in 6.12 ausgesprochenen Tatbestand nicht. Andererseits gelten in S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ alle Sätze aus IV_ω d.h. S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind *arithmetische Erweiterungen* von M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, im Sinne von Tarski und Vaught [*21*].

§ 7. 7.1 Ein anderes Verfahren zu einem Modell von einem System IV_ω zu gelangen, das mit M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ nicht isomorph ist, wurde von L. Henkin angegeben. Es beruht auf dem Gödelschen Vollständigkeitssatz, aus dem man entnimmt, *daß jedes widerspruchsfreie abzählbare Axiomensystem, (formuliert im Prädikatenkalkül der ersten Stufe), ein Modell besitzt.* (Der Satz gilt allgemeiner, wie A. Malcev [*8*] und L. Henkin [*3, 4*] gezeigt haben.)

Im folgenden, beschränken wir uns, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, auf die Betrachtung von nicht reduzierten Modellen, also M_{IV_ω}, S_{IV_ω} und weitere dieser Art. Alle Sätze lassen sich ohne besondere Mühe auf die bezüglich Gleichheit reduzierten Modelle übertragen.

Gehen wir nun von der in 6.7 eingeführten Gesamtheit $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ der konstanten Terme aus und nehmen wir zu einem System IV_ω ein neues Individuensymbol, etwa α hinzu, sowie die (übrigens rekursive) Menge H von Axiomen, die zusammen besagen, daß α größer als jedes Element aus $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ ist. Unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit von IV_ω erkennt man, daß das so erweiterte System IV'_ω ebenfalls widerspruchsfrei ist, da jede endliche Teilmenge von H zusammen mit IV_ω erfüllbar ist. Also besitzt IV'_ω gemäß dem Gödelschen Satz ein Modell, das dann alle Sätze von IV_ω erfüllt, aber offenbar nicht isomorph zu M_{IV_ω} ist.

A. Robinson [*13*] hat nun auf modelltheoretischem Wege einen Zusammenhang zwischen den Skolemschen und den Henkinschen Verfahren zur Bildung von Nicht-Standardmodellen (der Zahlentheorie) hergestellt, den wir hier auf einem anderen Wege in etwas verschärfter Form herleiten werden.

Zunächst eine Vorbemerkung anderer Art:

7.2 *Von den Systemen* II′, III′, IV'_ω, *die aus den entsprechenden ungestrichenen Systemen durch eine Henkinsche Erweiterung vermöge der Axiomenmenge H (bezogen auf die Sprachen* II, III, IV) *hervorgehen, ist* II′ *vollständig, während* III′ *und die umfassenderen Systeme unvollständig sind.*

Beweis. Die Aussagen, von II′, III′, IV'_ω, die das Symbol α nicht enthalten, sind durch die (vollständigen) Systeme II, III, IV_ω festgelegt. Wir haben also nur noch Aussagen $A(\alpha)$ zu betrachten, die das Symbol α enthalten; $A(c)$ gehe aus $A(\alpha)$ dadurch hervor, daß α an allen Stellen, an denen es vorkommt durch c ersetzt wird. Gilt $A(c)$ in II, III, IV_ω nur für endlich viele Terme aus den reduzierten Termmodellen M^*_{II}, M^*_{III}, $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ und seien $T_1, \ldots, T_n$ diese

Terme, dann kann man in den entsprechenden Systemen $\wedge x(x \neq T_1 \wedge \ldots \wedge x \neq T_n \rightarrow \neg A(x))$ beweisen; daraus folgt $\neg A(\alpha)$. Kurz gesagt, nur für Eigenschaften $A(c)$, derart, daß sowohl $A(c)$ als auch $\neg A(c)$ für unendlich viele (im reduzierten Modell verschiedene) Terme zutrifft, kann hinsichtlich der Gültigkeit von $A(\alpha)$ in II′, III′, IV'_ω Zweifel bestehen. Nun folgt unsere Behauptung mit Hilfe von zwei Sätzen von P. BERNAYS. Das System II, das im wesentlichen mit dem System B in [5], I, p. 273 übereinstimmt hat die Eigenschaft, vgl. l.c. p. 354, daß für alle Formeln $A(c)$ mit einer freien Variablen gilt

$$7.3 \qquad \vee x \wedge y(y \geqq x \rightarrow A(y)) \vee \vee x \wedge y(y \geqq x \rightarrow \neg A(y)).$$

Also liegen nach dem vorhin Bemerkten die Aussagen $A(\alpha)$ in II′ alle fest, d.h. II′ ist vollständig. Dagegen gilt 7.3 wie l.c. p. 369 gezeigt ist, schon für III und a fortiori für IV nicht. Betrachten wir etwa das System III′ mit dem Zusatzaxiom $\mathrm{Ger}(\alpha)$, worin $\mathrm{Ger}(a)$ etwa durch $\vee x(x+x=a)$ definiert ist, dann sieht man, daß sowohl $\mathrm{III}' \cup \mathrm{Ger}(\alpha)$, als auch $\mathrm{III}' \cup \neg\, \mathrm{Ger}(\alpha)$ widerspruchsfrei sind, also III′, und ebenso IV'_ω unvollständig sind.

Für das Folgende beschränken wir uns wieder auf die Systeme IV_ω. Die Übertragung der Überlegungen auf andere Systeme ergibt sich nach den Vorbemerkungen zu §4 und nach 6.1 ohne weitere Schwierigkeit.

Von IV_ω gelangen wir durch Hinzunahme der Axiome H zu einem System IV'_ω. Wenden wir darauf den Lindenbaumschen Satz (3.5) an, dann erhalten wir ein System $\mathrm{IV}^\omega_\omega$, das vollständig ist, und es gibt, wie aus 7.2 ersichtlich verschiedene solche Systeme $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ über IV_ω.

Die hier auftretenden beiden Vervollständigungsprozesse können zu einem einzigen zusammengezogen werden:

7.4 *Die Gesamtheit der Systeme* $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ *ist identisch mit der Gesamtheit der (widerspruchsfreien) vollständigen Obersysteme von* $\mathrm{IV} \cup H$.

Beweis. Es sei $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ entstanden durch zwei Lindenbaumsche Vervollständigungen der Art 3.5 vermöge der Aufzählungsfunktionen $r_1(a)$ und $r_2(a)$, wobei $r_1(a)$ bzw. $r_2(a)$ die Aussagen der Sprache IV, bzw. der Sprache IV mit α aufzählen. Wir definieren: $r^*(2k) = r_1(k)$, $r^*(2k+1) = r_2(k)$; $\mathfrak{B}$ sei wie früher die Menge der beweisbaren Sätze des Systems IV. Wir definieren dann den neuen Vervollständigungsprozeß:

$$7.5 \qquad \begin{cases} \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{B} \cup H \\ \mathfrak{C}_{2n+1} = \begin{cases} \mathfrak{C}_{2n}, & \text{wenn } X_{2n} \text{ bei der Vervollständigung} \\ & \text{vermöge } r_1(a) \text{ nicht aufgenommen wurde,} \\ \mathfrak{C}_{2n} \cup X_{2n} & \text{sonst.} \end{cases} \\ \mathfrak{C}_{2n+2} = \begin{cases} \mathfrak{C}_{2n+1}, & \text{Bedingung wie oben mit } r_2(a), \\ \mathfrak{C}_{2n+1} \cup X_{2n+1} & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathfrak{C}_\omega = \Sigma \mathfrak{C}_n. \end{cases}$$

Man sieht leicht, unter Benutzung der entsprechenden Eigenschaften von $\mathrm{IV}^\omega_\omega$: $\mathfrak{C}_\omega \supseteq \mathfrak{B} \cup H$, $\mathfrak{C}_\omega$ ist widerspruchsfrei und vollständig, $\mathfrak{C}_\omega$ ist mit der Gesamt-

heit der beweisbaren Sätze von $\mathrm{IV}_\omega^\omega$ identisch; wir können also $\mathrm{IV}_\omega^\omega$ im Sinne unserer Bezeichnungen auch $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ nennen.

Sei nun $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ durch einen Vervollständigungsprozeß vermöge einer Funktion $r'(a)$, die die Aussagen der Sprache IV mit α aufzählt, aus $\mathfrak{C}_0$ entstanden und die Gesamtheit der beweisbaren Sätze von $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ sei etwa $\mathfrak{C}'_\omega$. $\mathfrak{A}$ sei wie früher die Gesamtheit der Aussagen der Sprache IV. $\mathfrak{C}'_\omega \cap \mathfrak{A}$ ist dann ein vollständiges System IV_ω, das wir uns etwa durch folgenden Prozeß definiert denken können: $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n$, wenn $X_n \notin \mathfrak{A}$ oder X_n nicht aufgenommen wird gemäß der Vervollständigung mit $r'(a)$, und $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n \cup X_n$ sonst. Wir gelangen dann zu $\mathfrak{C}'_\omega$, indem wir das Lindenbaumsche Verfahren, vgl. 3.5, auf $\mathfrak{C}'_\omega \cap \mathfrak{A}$ mit $r'(a)$ anwenden. Dabei wird eine Aussage, die bei der Bildung von $\mathfrak{C}'_\omega$ auf- bzw. nicht aufgenommen wurde, auch jetzt auf- bzw. nicht aufgenommen.

Das nicht-reduzierte (bzw. reduzierte) Termmodell eines Systems $\mathrm{IV}_\omega^\omega$, d.h. nach 7.4 eines Systems $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$, oder wie wir auch sagen wollen $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$, bezeichnen wir mit H_{IV_ω} bzw. $H^*_{\mathrm{IV}_\omega}$.

7.6 *Zu jedem Modell S_{IV_ω} gibt es ein isomorphes Modell H_{IV_ω}.* (Bei A. Robinson ist dieser Satz unter der Voraussetzung, daß H_{IV_ω} schon Teilmodell von S_{IV_ω} ist, bewiesen.)

Beweis. Dem Individuensymbol α ordnen wir (wie es auch Robinson tut) den Index $\mathfrak{k}$ aus S_{IV_ω} der Funktion $\mu_x(c = x)$ zu. Im weiteren brauchen wir uns nur mit Aussagen $A(\alpha)$ zu beschäftigen, die α enthalten. Ferner soll eine Aussage $A(\alpha)$ zu $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ als beweisbare Aussage gehören, genau dann, wenn $\bar{A}(\mathfrak{k})$ in S_{IV_ω} gilt. (Hier geht, wie in §5, $\bar{A}(\mathfrak{k})$ aus $A(\mathfrak{k})$ durch Überstreichung hervor.)

Auf Grund von 6.10 ist unsere Festsetzung mit den Axiomen aus H im Einklang.

$\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ ist widerspruchsfrei. Andernfalls wären zwei Aussagen $A(\alpha)$ und $\neg A(\alpha)$ beweisbar, d.h. nach unserer Zuordnung $\bar{A}(\mathfrak{k})$ und $\overline{\neg A}(\mathfrak{k})$, also $\bar{A}(\mathfrak{k})$ und $\neg \bar{A}(\mathfrak{k})$ in S_{IV_ω} gültig, im Widerspruch zu 6.2.

$\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ ist vollständig. Von dem eben betrachteten Aussagenpaar muß nach 6.2 eine in S_{IV_ω} gelten, also die zugeordnete Aussage in $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$.

H_{IV_ω} ist isomorph zu S_{IV_ω}. Man ordne den konstanten α-freien Termen T aus H_{IV_ω} die Indices von $\mu_x(c = c \wedge x = T)$ zu, und den Termen $T(\alpha)$ die Terme $\overline{T}(\mathfrak{k})$. Diese eineindeutige Abbildung erschöpft S_{IV_ω}. Dazu genügt es zu zeigen, daß sich jedes $i \in S_{\mathrm{IV}_\omega}$ in der Form $\bar{\mu}_x \bar{C}(x, \mathfrak{k})$ darstellen läßt. Sei i Index einer Funktion $C(x, c)$ und $\mathfrak{c}$ die Gödel-Nummer von $C(a, c)$, dann gilt

$$i \sim \bar{\mu}_x \bar{C}(x, \mathfrak{k}),$$

d.h. $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to \nu(i, d(y)) = \nu(\psi(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}), d(y))\right)$. Nach 5.1 und der Bedeutung der Funktion $\nu(a, b)$ ist aber $\nu(i, c) = \mu_x C(x, c)$, $\nu(\psi(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}), c) = \mu_x C(x, \nu(\mathfrak{k}, c))$ und $\nu(\mathfrak{k}, c) = c$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Die Isomorphie ist damit unter Benutzung unserer Definition von $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ gewährleistet.

7.7 Zu jedem Modell H_{IV_ω} gibt es ein isomorphes Modell S_{IV_ω}.

Beweis. (Hier folgen wir in den Hauptlinien dem Beweis des entsprechenden Satzes von ROBINSON.) Zunächst sieht man sofort, daß sich jeder konstante Term aus H_{IV_ω} in der Form $\mu_x A(x, \alpha)$ darstellen läßt, auch α-freie Terme T, etwa durch $\mu_x(\alpha = \alpha \wedge x = T)$. Mit Hilfe der Indices der Elemente von $\mathfrak{f}$ läßt sich also jedes Element aus H_{IV_ω} in der Form $f_i(\alpha)$ darstellen, wobei $f_i(c)$ aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ ist.

Wir erklären nun eine Funktion $d(c)$, die für die Aufstellung des gesuchten Modells S_{IV_ω} dieselbe Rolle spielt, wie die gleichbezeichnete Funktion in §4. Mit Hilfe einer Funktion $v(a, b)$, — jetzt bezogen auf das System $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ — führen wir wie in 4.1 die Abkürzung $q'(a, b)$ ein; es möge ferner $\bigwedge_{i=0}^{n} A_i$ die Konjunktion $A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ bezeichnen. Wir definieren nun:

7.8
$$\begin{cases} d(0) = \mu_x\big(q'(0, \alpha) = 0 \to q'(0, x) = 0 \,.\wedge.\, q'(0, \alpha) = 1 \to q'(0, x) = 1\big), \\ d(Sn) = \mu_x\Big(d(n) < x \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} q'(i, x) = q'\big(i, d(i)\big) \wedge \\ \qquad \wedge \big(q'(Sn, \alpha) = 0 \to q'(Sn, x) = 0\big) \wedge \\ \qquad \wedge \big(q'(Sn, \alpha) = 1 \to q'(Sn, x) = 1\big)\Big). \end{cases}$$

Es ist nun vor allem zu zeigen, daß $d(c)$ streng monoton wächst. Dies ergibt sich schrittweise:

1) Von den Aussagen $q'(n, \alpha) = 0$, $q'(n, \alpha) = 1$ gilt genau eine für jedes n; dies folgt aus der Vollständigkeit von $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$.

2) Aus $q'(n, \alpha) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ folgt $\vee y\left(q'(n, y) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$.

3) Die in 2) erhaltene Existenzaussage ist eine solche aus IV_ω d.h. es gibt einen Term T aus $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$, der $< \alpha$ ist, und der Bedingung genügt; für $n = 0$ ist $d(0)$ der kleinste dieser Art.

4) Aus 2) und 3) erhält man für die Konjunktionen, die in der Definition von $d(Sn)$ vorkommen, Sätze ähnlicher Art wie 3), und unsere Behauptung ergibt sich dann durch Induktion nach n.

Es läßt sich daraufhin wie in §4 ein zu 4.9 analoges Lemma beweisen:

7.9
$$q'\big(n, d(c)\big) = q'\big(n, d(n)\big),$$

wobei wie in 4.9 die rechte Seite dieser Gleichung von c unabhängig ist. Nun können die Definitionen 5.3 wörtlich übernommen werden. Damit ist das Modell S_{IV_ω} festgelegt. Ordnen wir nun jedem Element $i \in S_{\mathrm{IV}_\omega}$ das Element $f_i(\alpha) \in H_{\mathrm{IV}_\omega}$ zu. Diese Abbildung ist eineindeutig und H_{IV_ω} wird tatsächlich ausgeschöpft, wie man aus der Anfangsbemerkung des Beweises ersieht. Ist speziell $\mathfrak{k}$ der Index von $\mu_x(c = x)$ dann ist $f_{\mathfrak{k}}(\alpha) = \alpha$, d.h. $\mathfrak{k}$ und α sind einander zugeordnet. Man sieht auch leicht, daß den α-freien konstanten Termen genau die Indices der (zugehörigen) konstanten Funktionen aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$

zugeordnet werden. Sei nun $A(\alpha)$ eine Aussage, die in H_{IV_ω} gilt, $A'(a, \alpha)$ z.B. die symbolisch aufgelöste Form von $A(\alpha)$; nach unserer Darstellung der Elemente von H_{IV_ω} durch die Funktionswerte $f_i(\alpha)$ geht $A'(a, \alpha)$ in $A'\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ über, und wir haben $\bar{A}'(a, \mathfrak{k})$, — woraus $\bar{A}(\mathfrak{k})$ folgt — zu zeigen. Dazu bringen wir $A'\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ auf eine disjunktive Normalform, und es sei $A'_j\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ eins der Disjunktionsglieder, das ja seinerseits aus einer Konjunktion von Gleichungen und Ungleichungen besteht. Nach der Konstruktion in 7.8 und 7.9 gilt dann für $c \geqq$ einem gewissen n: $A'_j\big(f_a(d(c)), f_{\mathfrak{k}}(d(c))\big)$, d.h. in unserer Ausdrucksweise von § 5 $A'_j\big(\nu(a, d(c)), \nu(\mathfrak{k}, d(c))\big)$ also mit 5.9 $\bar{A}'_j(a, \mathfrak{k})$; der Rückgang zu $\bar{A}'(a, \mathfrak{k})$ erfolgt durch Alternativschlüsse, vgl. den Beweis von 5.9 Nr. 2.

7.10 Für das Folgende beschränken wir unsere Betrachtungen auf Henkin-Modelle. *Zwei Systeme* IV^0_ω *und* IV^1_ω *sollen verschieden heißen, wenn es ein Aussagenpaar* $X, \neg X$ *gibt, so daß in* IV^0_ω X, *und in* IV^1_ω $\neg X$ *gilt.* Die zugehörigen Termmodelle $M_{\mathrm{IV}^0_\omega}$, $M_{\mathrm{IV}^1_\omega}$ heißen dann (nach der Ausdrucksweise von G. Kemeny [6]) *wesentlich verschieden.* Nach 6.12 sind die Modelle S_{IV_ω}, also nach 7.6 und 7.7 auch die Modelle H_{IV_ω} arithmetische Erweiterungen (vgl. [21]) von M_{IV_ω}, daher sind H_{IV_ω} und M_{IV_ω} nicht wesentlich verschieden. Seien die Systeme IV^0_ω und IV^1_ω verschieden, dann folgt also, daß jedes Modell $H_{\mathrm{IV}^0_\omega}$ von allen Modellen $H_{\mathrm{IV}^1_\omega}$ wesentlich verschieden ist. Es scheint somit, daß wir durch die Betrachtung der Modelle H_{IV_ω} kaum Einsicht in die feinere Struktur der Modelle M_{IV_ω} erhalten, sondern es dürfte wohl erforderlich sein, zur Untersuchung der Modelle M_{IV_ω} auf den besonderen Charakter der sie bestimmenden Aussagen, die im Laufe der Vervollständigung von IV zu IV_ω als Axiome aufgenommen werden, näher einzugehen.

7.11 Fügt man zu dem System IV_ω eine Axiomenmenge H^z hinzu, in der das Größersein nur aller Ziffern $0, S0, SS0, \ldots$ von einem (neuen) Individuensymbol α gefordert wird, dann kann z.B. α widerspruchsfrei mit $\mu_x B(x, „0 = S0“)$ identifiziert werden, und so auch mit anderen μ-Termen, die unentscheidbaren Aussagen des Systems IV korrespondieren. (Nach einer solchen Identifizierung wird natürlich α explizit definierbar, also überflüssig.)

G. Kemeny [6], p. 164 hat die Frage offen gelassen, ob Modelle von $\mathrm{IV} \cup H^z$ von dem Standardmodell $M_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ wesentlich verschieden sind. Diese Frage wird beantwortet durch

7.14 *Wenn bei einer Vervollständigung von* $\mathrm{IV} \cup H^z$ α *mit einem* α*-freien* μ*-Term identifiziert wird, — dieser* μ*-Term ist dann sicher nicht gleich einer Ziffer —, dann ist das entstehende Termmodell von dem Standardmodell* $M_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ *wesentlich verschieden; andernfalls entsteht nach 7.10 ein Modell* H_{IV_ω}, *das von jedem Modell* $H_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ (*hinsichtlich der Sprache* IV) *genau dann wesentlich verschieden ist, wenn* IV_ω *und* $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ *verschieden sind.*

Literatur

[1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatshefte Math. Phys. **37**, 349—360 (1930).

[2] — Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte Math. Phys. **38**, 173—198 (1931).

[3] HENKIN, L.: The Completeness of the first order functional calculus. J. Symb. Log. **14**, 159—166 (1949).
[4] — Completeness in the theory of types. J. Symb. Log. **15**, 81—91 (1950).
[5] HILBERT, D., u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I und II. Berlin: Springer Bd. I (1934), Bd. II (1939).
[6] KEMENY, G.: Undecidable problems of elementary number theory. Math. Ann. **135**, 160—169 (1958).
[7] KREISEL, G.: Applications of mathematical logic to various branches of mathematics. Applications scientifiques de la Logique mathématique, 37—49. Paris: Gauthier-Villars 1954.
[8] MALCEV, A.: Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik. (Mat. Sbornik) Recueil mathématique, n. s. **1**, 323—336 (1936).
[9] MOSTOWSKI, A.: Sentences undecidable in formalized arithmetic. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1952.
[10] — Quelques observations sur l'usage des méthodes non finitistes dans la méta-mathématique. Les raisonnement en mathématique et en sciences expérimentales, 19—29. Paris: Editions du CNRS 1958.
[11] MÜLLER, G. H.: Über die unendliche Induktion. Infinitistic methods, 75—95. Warsaw: Pergamon-Press 1961.
[12] MYHILL, J.: Arithmetic with creative definitions by induction. J. Symb. Log. **18**, 115—118 (1953).
[13] ROBINSON, A.: Modeltheory and non-standard arithmetic. Infinitistic methods, 265—302. Warsaw: Pergamon-Press 1961.
[14] SKOLEM, TH.: Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk Matematik Foreningss Skrifter, Ser. II Nr. 1—12, 73—82 (1933).
[15] — Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vielen Aussagen mit ausschließlich Zahlvariablen. Fund. Math. **23**, 150—161 (1934).
[16] — Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf „arithmetische". Acta Litt. scient. Szeged **8**, 73—88 (1937).
[17] — Some remarks on the comparison between recursive functions. Kon. Norske Videnskabers Selskab Forh. **17**, 126—128 (1944).
[18] — Peano's axioms and models of arithmetic .Mathematical Interpretation of Formal Systems, 1—14. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1955.
[19] TARSKI, A.: Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I. Monatshefte Math. Phys. **37**, vgl. Satz I.56 auf S. 394, (1930).
[20] — (in collaboration with A. MOSTOWSKI and R. M. ROBINSON): Undecidable Theories. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1953.
[21] —, and R. L. VAUGHT: Arithmetical extensions of relational systems. Comp. Math. **13**, 81—102 (1957).
[22] WANG, H.: Certain predicates defined by induction schemata. J. Symb. Log. **18**, 49—59 (1953).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Juni 1961)

Jehne, W.
Math. Zeitschr. 77, 439—452 (1961)

Zur Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Wolfram Jehne

In einer früheren Arbeit [*12*], in der erstmalig der Existenzsatz der lokalen Klassenkörpertheorie bewiesen wurde, hat F. K. Schmidt einen Satz über globale Einheiten endlicher algebraischer Zahlkörper aufgestellt, der in der neueren Entwicklung der globalen Klassenkörpertheorie eine wichtige Rolle spielt. Dieser Satz stellt zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Existenz eines ganzrationalen Moduls m (sogar unendlich vieler zu einer gegebenen natürlichen Zahl primer Moduln) fest, so daß jede Einheit $\equiv 1 \bmod m$ eine n-te Einheitenpotenz ist [1]). Oder anders ausgedrückt: Auf der Einheitengruppe E stimmen die durch die Systeme $\{\mathsf{E}^n \mid n > 0\}$ und $\{\mathsf{E}(m) \mid m > 0\}$ der Gruppen E^n aller n-ten Potenzen und der Gruppen $\mathsf{E}(m)$ aller Einheiten $\equiv 1 \bmod m$ definierten Topologien überein. Dieser Sachverhalt wurde von Chevalley [*2*] wiederentdeckt und auf endlich-erzeugte Untergruppen der Multiplikationsgruppe verallgemeinert. Seine Hauptanwendung besteht in der Strukturbestimmung (Weil [*14*], Abschnitt III) bzw. expliziten Bestimmung (Artin [*1*]) der Zusammenhangskomponente der Eins der Idelklassengruppe.

Die Frage nach der genauen Anzahlbestimmung der unabhängigen Γ-Erweiterungen eines endlich-algebraischen Zahlkörpers im Sinn Iwasawas [*8*] (das sind unendliche Erweiterungen mit zum Ring Γ_p der ganzen p-adischen Zahlen isomorpher Galoisgruppe) hat mich vor einiger Zeit auf das Problem der folgenden Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes geführt: Ist bei gegebener Primzahlpotenz $n = p^\nu$ als Exponenten auch der Modul m als Primzahlpotenz p^μ wählbar? Um zu einer für die Anwendungen geeigneteren Fassung zu gelangen, denke man sich E in das Produkt der $\mathfrak{p}$-adischen Hüllen des Zahlkörpers für alle Primteiler $\mathfrak{p}$ der Primzahl p eingebettet und dann auf das Produkt $\mathsf{H}_p = \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathsf{H}_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-adischen Einseinheitengruppen $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ projiziert. Dann läuft die Verschärfung auf die Frage hinaus, ob die Projektionen eines Grundeinheitensystems innerhalb H_p auch bezüglich ganz-p-adischer Zahlen als Exponenten unabhängig bleiben.

Dieses Einheitenproblem erweist sich selbst für spezielle Zahlkörper als schwer zugänglich. Es soll in dieser Arbeit für p^ν-te Kreiskörper behandelt

[1]) Der Satz ist in [*12*] auf S. 164 in (E_m) unter der Voraussetzung formuliert, daß der Körper die n-ten Einheitswurzeln enthält, und wird dann in den weiteren Ausführungen, insbesondere Hilfssatz 2, von dieser Einschränkung befreit.

werden, einer Körperklasse, die in neuerer Zeit durch die Arbeiten IWASAWAS über Klassenzahlen von Γ-Erweiterungen wiederum in den Vordergrund getreten ist. In seiner Arbeit [9] über Kreiskörper ist IWASAWA ebenfalls auf dieses Problem geführt worden. Für eine andere Körperklasse, nämlich reelle absolut-abelsche Zahlkörper, in denen p unverzweigt ist und nicht im Grad aufgeht, sind Unabhängigkeitsfragen ähnlicher Art mit anderen Methoden von LEOPOLDT [11] untersucht worden.

In dieser Arbeit wird eine Primzahl p *stabil* genannt, wenn in allen p^ν-ten Kreiskörpern P_ν der verschärfte F. K. Schmidtsche Einheitensatz bezüglich p gilt. Es ist nicht schwer zu sehen (§1), daß alle regulären Primzahlen p stabil sind; für den p-ten Kreiskörper P_1 ist diese Unabhängigkeitsaussage bereits in einem klassischen Einheitensatz von KUMMER-HILBERT enthalten. Für irreguläre Primzahlen wird man den Stabilitätsbegriff zweckmäßigerweise noch gemäß der Iwasawaschen direkten Zerlegung der Einseinheitengruppe H_ν für p der P_ν in j-te Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{(j)}$ $(j=0, \ldots, p-2)$ verfeinern: p heißt *k-stabil*, wenn der in $\mathsf{H}_\nu^{(2k)}$ fallende Teil der von den Einheitenprojektionen in H_ν bezüglich Γ_p erzeugten Untergruppe maximalen Γ_p-Rang hat. k-Stabilität für alle $k=0, \ldots, (p-3)/2$ ist dann gleichbedeutend mit Stabilität schlechthin. In §1 leiten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für k-Stabilität her (Satz 1), mit dessen Hilfe in §2 dann die k-Stabilität aller Primzahlen p für $k=0$ und 1 bewiesen wird (Satz 2). Die 0-Stabilität besagt dabei nichts anderes als die Gültigkeit des verschärften F. K. Schmidtschen Einheitensatzes für die Teilkörper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ vom Absolutgrad $p^{\nu-1}$ der Kreiskörper P_ν $(\nu \geqq 2,\ p \neq 2)$.

Die Unabhängigkeitsbeweise bezüglich Γ_p werden für die explizit bekannte Kreiseinheitengruppe von P_ν geführt, deren Index in der vollen Einheitengruppe bekanntlich im wesentlichen die Klassenzahl des maximal-reellen Teilkörpers, also endlich ist. In Ausdehnung eines Resultates von HASSE [6] für $p=2$ auf die Fälle $p \neq 2$ wird schließlich in §3 gezeigt, daß die Kreiseinheitengruppe von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ zusammen mit $1+p$ die volle lokale Einseinheitengruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ erzeugt. Als Nebenergebnis wird in Beantwortung einer in [6] aufgeworfenen Frage die Struktur von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ als Operatorgruppe bezüglich der Galoisgruppe aufgeklärt, was auf anderem Weg schon von IWASAWA in [9] geleistet wurde.

§1. Ein Kriterium für die k-Stabilität

1. Wir stellen zunächst einige Bezeichnungen zusammen — im wesentlichen nach HASSE [4] — und gehen kurz auf die Iwasawasche Zerlegung der Einseinheitengruppen nach [9] ein. Für eine Primzahl $p \neq 2$ bezeichnen wir mit

$\mathsf{P}_\nu = \mathsf{P}(\zeta_\nu)$ den Körper der p^ν-ten Einheitswurzeln über dem Körper $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0$ der rationalen Zahlen,

ζ_ν eine primitive p^ν-te Einheitswurzel mit $\zeta_{\nu+1}^p = \zeta_\nu$ für alle ν,

P_ν^+ den maximalreellen Teilkörper von P_ν,

$\Lambda_\nu = \mathsf{P}_\nu \mathfrak{p}_\nu$, Λ_ν^+ die vollständige Hülle von P_ν bzw. P_ν^+ bei dem Primdivisor $\mathfrak{p}_\nu | p$ von P_ν bzw. $\mathfrak{p}_\nu^+ | p$ von P_ν^+.

Die Erzeugenden der Galoisgruppen $\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)} = \mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu | \mathsf{P}_\mu)$ für $1 \leqq \mu < \nu$ und $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}(\mathsf{P}_1 | \mathsf{P})$ werden mit $s_\mu = s_\mu^{(\nu)}$, u bezeichnet und so normiert, daß

$$\zeta_\nu^{s_1} = \zeta_\nu^{1+p}, \quad \zeta_\nu^{u} = \zeta_\nu^{w} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad s_\mu = s_1^{p^{\mu-1}}$$

gilt mit einer primitiven $(p-1)$-ten Einheitswurzel w. Auf Grund der direkten Zerlegung $\mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu | \mathsf{P}) = \mathfrak{h}_1^{(\nu)} \times \mathfrak{u}$ bestehen für die Körper analoge Zerlegungen über P: $\mathsf{P}_\nu = \bar{\mathsf{P}}_\nu \times \mathsf{P}_1$ mit den Fixkörpern $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ der Gruppe $\mathfrak{u}$. Der Gruppenring $\Gamma_p[\mathfrak{u}] = \sum_{j=0}^{p-2} \Gamma_p u^j$ von $\mathfrak{u}$ über dem Ring Γ_p der ganzen p-adischen Zahlen zerfällt voll: $\Gamma_p[\mathfrak{u}] = \oplus \sum_{i=0}^{p-2} \Gamma_p e_i$ mit Idempotenten $e_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{p-2} w^{-ij} u^j$, und zieht daher für die Gruppe H_ν der lokalen Einseinheiten von Λ_ν die direkte Zerlegung

$$\mathsf{H}_\nu = \prod_{i=0}^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}$$

nach sich. Wegen $e_i u^{(p-1)/2} = w^{i(p-1)/2} e_i = (-1)^i e_i$ ist die Einseinheitengruppe H_ν^+ von Λ_ν^+ gegeben durch

$$\mathsf{H}_\nu^+ = \prod_{k=0}^{(p-3)/2} \mathsf{H}_\nu^{e_{2k}} = \mathsf{H}_\nu^{e^+} \quad \text{mit} \quad e^+ = \sum e_{2k}, \qquad e^- = \sum e_{2k+1},$$

während die Einseinheitengruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ der $\mathfrak{p}$-adischen Hülle $\bar{\Lambda}_\nu$ von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ offenbar mit $\mathsf{H}_\nu^{e_0}$ übereinstimmt, da e_0 im wesentlichen der Normoperator $\bar{N} = N_{\Lambda_\nu | \bar{\Lambda}_\nu}$ und $(\Lambda_\nu : \bar{\Lambda}_\nu) = p - 1$ prim zu p ist.

Die Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{e_i}$ haben nun sämtlich gleichen Γ_p-Rang: $\Gamma_p\text{-rg}(\mathsf{H}_\nu^{e_i}) = p^{\nu-1}$ $(i = 0, \ldots, p-2)$. Es genügt, dies für eine geeignete Untergruppe A_ν von endlichem Index in H_ν zu zeigen. Eine solche kann nach bekannten Methoden bezüglich $\mathfrak{u}$ regulär, d.h. von der Form $A = \operatorname{dir} \prod_{j=0}^{p-2} B_\nu^{u^j}$ gewählt werden. Da $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu) = \varphi(p^\nu)$ ist, hat die Γ_p-Gruppe B_ν den Γ_p-Rang $p^{\nu-1}$. Nun ist aber $A_\nu^{e_i} = \prod_j B_\nu^{w^{ij} e_i} = B_\nu^{e_i}$, also $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i}) \leqq p^{\nu-1}$. Wegen $\varphi(p^\nu) = \Sigma\, \Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i})$ folgt $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i}) = p^{\nu-1}$, also die Behauptung.

Von besonderem Interesse für das folgende ist die Untergruppe N_ν von H_ν aller Zahlen γ mit Absolutnorm $N_{\Lambda_\nu | \Lambda_0} \gamma = 1$, und die entsprechenden Gruppen N_ν^+, $\bar{\mathsf{N}}_\nu$ von Λ_ν^+, $\bar{\Lambda}_\nu$. Da schon $\bar{N}\left(\prod_1^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}\right) = 1$ ist, gilt

$$\mathsf{N}_\nu = \bar{\mathsf{N}}_\nu \times \prod_1^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}, \qquad \mathsf{N}_\nu^+ = \bar{\mathsf{N}}_\nu \times \prod_1^{(p-3)/2} \mathsf{H}_\nu^{e_{2k}}. \tag{1.1}$$

Man verifiziert leicht die Zerlegungen

$$\bar{\mathsf{H}}_\nu = \mathsf{H}_0 \times \bar{\mathsf{N}}_\nu, \qquad \mathsf{H}_\nu^+ = \mathsf{H}_0 \times \mathsf{N}_\nu^+, \tag{1.1'}$$

wo $\mathsf{H}_0=[1+\mathfrak{p}]$ die von $1+\mathfrak{p}$ erzeugte Γ_p-zyklische Gruppe ist. Denn einerseits ist nach der lokalen Klassenkörpertheorie für die vollverzweigte Erweiterung $\bar{\Lambda}_\nu|\Lambda_0$: $|H^0(\mathfrak{h}_1^{(\nu)}, \bar{\mathsf{H}}_\nu)| = (\mathsf{H}_0: N_1^\nu \bar{\mathsf{H}}_\nu) = p^{\nu-1}$, andererseits ist $\mathsf{H}_0\bar{\mathsf{N}}_\nu = \mathsf{H}_0\times\bar{\mathsf{N}}_\nu$ direkt. Somit enthalten die Gruppen $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ und $\mathsf{H}_0\times\bar{\mathsf{N}}_\nu$ den Kern $\bar{\mathsf{N}}_\nu$ und haben das gleiche Bild $N_1^\nu(\bar{\mathsf{H}}_\nu) = N_1^\nu(\mathsf{H}_0\times\bar{\mathsf{N}}_\nu) = \mathsf{H}_0^{p^{\nu-1}}$, stimmen also überein.

Den Beziehungen (1.1′) entnimmt man leicht

$$\mathsf{N}_\mu = N_\mu^\nu \mathsf{N}_\nu \qquad (1 \leqq \mu < \nu). \tag{1.2}$$

Denn nach der lokalen Klassenkörpertheorie hat wieder $H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_\nu) = H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_0)\times H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{N}_\nu)$ die Ordnung $p^{\nu-\mu}$; da schon $|H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_0)| = p^{\nu-\mu}$ gilt, ist in der Tat $H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{N}_\nu) = 1$.

Abschließend verabreden wir, den Index bezüglich $\mathfrak{p}_\nu$ einer genauen ϱ-ten Einseinheit, d.h. einer Einheit γ_ϱ aus H_ν mit $\gamma_\varrho \equiv 1\,(\mathfrak{p}_\nu^\varrho)$ doch $\gamma_\varrho \not\equiv 1\,(\mathfrak{p}_\nu^{\varrho+1})$, mit $\varrho = \operatorname{ind}\gamma_\varrho$ zu bezeichnen, und die entsprechenden Indizes in H_ν^+, $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ mit ind^+ bzw. $\overline{\operatorname{ind}}$. Der Index ν wird häufig fortgelassen, wenn kein Mißverständnis entstehen kann.

2. Da die Einseinheitengruppe H_ν in der lokalen Multiplikationsgruppe $\Lambda_\nu^\times$ direkter Faktor ist, kann für jede Untergruppe A der globalen Multiplikationsgruppe $\mathsf{P}_\nu^\times \subset \Lambda_\nu^\times$ die Projektion $\operatorname{pr}_{\mathsf{H}_\nu} A$ auf den Faktor H_ν gebildet werden; mit $\tilde{A}$ wird dann das Γ_p-Erzeugnis von $\operatorname{pr}_{\mathsf{H}_\nu} A$ in H_ν bezeichnet. Nun haben die Einheiten aus P_ν bzw. P_ν^+ die Absolutnorm ± 1, ihre Projektionen in H_ν also sogar die Absolutnorm 1. Es gilt somit für die Einheitengruppen E_ν, E_ν^+ von P_ν bzw. P_ν^+: $\tilde{\mathsf{E}}_\nu \subseteqq \mathsf{N}_\nu$, $\tilde{\mathsf{E}}_\nu^+ \subseteqq \mathsf{N}_\nu^+$.

In der Einleitung wurde die Ausgangsfrage der Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes in einer anderen Form ausgesprochen, wie sie sich in der Klassenkörpertheorie und im Zusammenhang mit Strukturfragen der p-Klassengruppe ergibt. Wir zeigen dazu: *Die durch die Umgebungsbasen* $\mathsf{E}_\nu(p^\varrho) = \{\varepsilon \in \mathsf{E}_\nu \mid \varepsilon \equiv 1 \bmod p^\varrho\}$ *und* $\mathsf{E}_\nu^{p^\mu}$ *auf* E_ν *definierten Topologien stimmen genau dann überein, wenn* $\tilde{\mathsf{E}}_\nu$ *maximalen* Γ_p*-Rang hat, also*

$$\Gamma_p\text{-rg}\,\tilde{\mathsf{E}}_\nu = \tfrac{1}{2}\varphi(p^\nu) - 1$$

gilt. Auf Grund des bekannten Zusammenhangs $\mathsf{E}_\nu = \mathsf{E}_\nu^+ \times (\zeta_\nu)$ (HASSE [5], III, §25) ist diese Unabhängigkeitsaussage auch mit $\Gamma_p\text{-rg}\,\tilde{\mathsf{E}}_\nu^+ = \tfrac{1}{2}\varphi(p^\nu) - 1$, oder also mit der Endlichkeit von $(\mathsf{N}_\nu^+ : \tilde{\mathsf{E}}_\nu^+)$ äquivalent. Ist dies der Fall für alle $\nu \geqq 1$, so soll die Primzahl p *stabil* heißen.

Zum Beweis sei F eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Γ-Rang m. Durch eine Umgebungsbasis $\{U\}$ der 0 von Untergruppen U von p-Potenzindex mit Durchschnitt $\{0\}$ wird in F eine präkompakte Topologie definiert, bei der die vollständige Hülle $\tilde{F}$ mit dem Γ_p-Erzeugnis von F in $\tilde{F}$

übereinstimmt. Insbesondere kann die freie Γ_p-Gruppe $F^* = \Gamma_p \underset{\Gamma}{\otimes} F$ vom Γ_p-Rang m mit der vollständigen Hülle von F bei der durch $\{\mathfrak{p}^\mu F\}$ definierten $\mathfrak{p}$-Topologie identifiziert werden. Faßt man F^* und $\widetilde{F}$ als projektive Limites der Faktorgruppen $F/\mathfrak{p}^\mu F$ bzw. F/U auf, so erhält man die natürliche exakte Folge

$$0 \to B \to F^* \to \widetilde{F} \to 0 \tag{1.3}$$

von stetigen Homomorphismen; φ ist sogar eine offene Abbildung. Setzt man $\overset{\circ}{U} = \mathfrak{p}^{n_U} F$ mit dem Exponenten $\mathfrak{p}^{n_U}$ von F/U, so ist Kern φ isomorph mit dem projektiven Limes $B = \varprojlim (F_U, r_V^U)$ der Gruppen $F_U = U/\overset{\circ}{U}$ bezüglich der natürlichen Homomorphismen $r_V^U\colon F_V \to F_U$ für $V < U$. Da die F_U endlich sind, existiert zu jedem U ein $U_1 < U$ mit $r_U B = r_{U_1}^U F_{U_1}$; hierbei sind $r_U\colon B \to F_U$ die durch die r_V^U bestimmten Homomorphismen. Einerseits liegt nun $B = 0$ genau dann vor, wenn $r_U B = 0$ ist für jedes U, also nach dem Gesagten $U_1 \leqq \overset{\circ}{U}$ mit geeignetem U_1 gilt; dies ist die Äquivalenz beider Topologien. Andererseits ist genau dann $B = 0$, wenn F^* und $\widetilde{F}$ gleichen Γ_p-Rang m haben. Dieser Sachverhalt ergibt die Behauptung, da die auf $\mathrm{pr}_{\mathsf{H}_\nu} \mathsf{E}_\nu^+$ in H_ν induzierte Topologie gerade durch die Gruppen $\{\mathsf{E}_\nu(\mathfrak{p}^\varrho)\}$ definiert wird.

Bekanntlich heißt eine Primzahl $\mathfrak{p}$ regulär, wenn sie nicht in der Klassenzahl h_1 des $\mathfrak{p}$-ten Kreiskörpers aufgeht. Man sieht leicht, daß alle regulären Primzahlen stabil sind. Für reguläre $\mathfrak{p}$ haben nämlich nach dem Furtwänglerschen Satz[2]) alle P_ν die $\mathfrak{p}$-Klassenzahl $h_{\nu\mathfrak{p}} = 1$. Wäre nun die reguläre Primzahl $\mathfrak{p}$ nicht stabil, so bestünde eine nichttriviale Relation $\prod_j' \varepsilon_{\nu j}'^{\alpha_j} = 1$ mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten α_j zwischen den Projektionen $\varepsilon_{\nu j}' = \mathrm{pr}\, \varepsilon_{\nu j}$ auf H_ν eines Grundeinheitensystems $\varepsilon_{\nu j}\left(j = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}\varphi(\mathfrak{p}^\nu) - 1\right)$ von P_ν^+. Hierbei kann etwa $\alpha_1 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ angenommen werden. Setzt man $\alpha_j \equiv a_j \bmod \mathfrak{p}$ mit ganzrationalen a_j, so ist die Einheit $\varepsilon = \prod \varepsilon_{\nu j}^{a_j}$ keine $\mathfrak{p}$-te Potenz in P_ν, dagegen nach Annahme eine lokale $\mathfrak{p}$-te Potenz in Λ_ν. Folglich ist $\mathsf{P}_\nu(\sqrt[\mathfrak{p}]{\varepsilon})$ eine nichttriviale, global unverzweigte Erweiterung von P_ν, im Widerspruch zu $h_{\nu\mathfrak{p}} = 1$. Für den $\mathfrak{p}$-ten Kreiskörper P_1 regulärer Primzahlen ist eine Γ_p-rg $\widetilde{\mathsf{E}}_1^+ = \frac{1}{2}(\mathfrak{p} - 1) - 1$ implizierende Aussage rechnerisch schon von Kummer-Hilbert (Hilbert, Zahlbericht §138, S. 281) festgestellt worden, deren Analogon für die Körper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ für alle Primzahlen in §3 dieser Arbeit hergeleitet wird.

Solange für keine hinreichend umfassende Klasse irregulärer Primzahlen die Stabilität feststeht, empfiehlt es sich, den Stabilitätsbegriff noch gemäß der Komponentenzerlegung (1.1) von N_ν^+ zu verfeinern: $\mathfrak{p}$ heiße *k-stabil*, wenn für alle $\nu \geqq 1$

$$\Gamma_p\text{-rg}\, \widetilde{\mathsf{E}}_\nu^{+\,e_{2k}} = \begin{cases} \mathfrak{p}^{\nu-1} - 1 & \text{im Fall } k = 0 \\ \mathfrak{p}^{\nu-1} & \text{im Fall } 1 \leqq k \leqq (\mathfrak{p} - 3)/2 \end{cases} \tag{1.4}$$

gilt, oder damit gleichbedeutend $(\mathsf{N}_\nu^{+\,e_{2k}} : \widetilde{\mathsf{E}}_\nu^{+\,e_{2k}})$ endlich ist.

[2]) Siehe etwa Iwasawa [8], p. 225 oder Serre [13], Théorème 1.

Zur Untersuchung der Gültigkeit von (1.4) bietet sich die explizit bekannte Kreiseinheitengruppe $F_\nu^+ = (\pi_\nu^{+\,t-1} \mid t \in \mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu^+ \mid \mathsf{P}))$ an, wobei das Primelement $\pi_\nu^+ = N^+\pi_\nu$ für $\mathfrak{p}_\nu^+$ aus dem normierten Primelement $\pi_\nu = 1 - \zeta_\nu$ für $\mathfrak{p}_\nu$ durch Normbildung bezüglich P_ν^+ entsteht. Sie hat in E_ν^+ endlichen Index $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)$ der nach der arithmetischen Klassenzahlformel (HASSE [5], II, §11) mit der Klassenzahl h_ν^+ von P_ν^+ bis auf einen 2-Potenzfaktor übereinstimmt. Mit dem freien Γ_p-Erzeugnis $F^* = \mathsf{E}_\nu^{+\,\Gamma_p}$ in (1.3) gilt für den p-Bestandteil $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)_p = (\mathsf{E}_\nu^{+\,\Gamma_p} : F_\nu^{+\,\Gamma_p})$. Folglich ist $(\widetilde{\mathsf{E}_\nu^+} : \widetilde{F_\nu^+})$ stets ein Teiler von $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)_p$, und die Gleichheit besteht jedenfalls für stabile Primzahlen. Für stabile Primzahlen p besteht daher die lokale Abschätzung

$$h_{\nu p}^+ = (\widetilde{\mathsf{E}_\nu^+} : \widetilde{F_\nu^+}) \mid (\mathsf{N}_\nu^+ : \widetilde{F_\nu^+})$$

der p-Klassenzahl.

3. Wir kommen nun zur Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die k-Stabilität:

Satz 1. *Es sei im Gruppenring von* $\mathfrak{g}(\mathsf{P}_1^+ \mid \mathsf{P})$ *über* Γ_p

$$\Delta_k^+(u) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{(p-3)/2} (u - w^{+\,j})$$

gesetzt mit der primitiven $(p-1)/2$*-ten Einheitswurzel* $w^+ = w^2$. *Die Primzahl* p *ist* k*-stabil dann und nur dann, wenn für die Kreiseinheiten* $\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}-1}$ *und* $\pi_1^{+\,u-1}$ *gilt:*

$$(a_\nu) \qquad \pi_\nu^{+\,(s_{\nu-1}-1)\,\Delta_k^+(u)} \neq 1 \quad \textit{für alle } \nu \geqq 2$$

$$(b) \qquad \pi_1^{+\,(u-1)\,(p-1)/2\,\cdot\,\Delta_k^+(u)} \neq 1 \quad \textit{im Fall } 1 \leqq k \leqq (p-3)/2.$$

Zum Beweis wird der folgende Sachverhalt über ganze p-adische Darstellungen zyklischer p-Gruppen benötigt:

Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{h} = (s)$ *eine zyklische Gruppe der Ordnung* p^n, x *eine Unbestimmte. Ein* Γ_p*-torsionsfreier zyklischer* $\Gamma_p[\mathfrak{h}]$*-Modul* $\mathfrak{m} = \Gamma_p[\mathfrak{h}]z$ *ist operatorisomorph zu* $\Gamma_p[x]/(f(x))$, *wobei* $f(x)$ *ein Polynom aus* $\Gamma_p[x]$ *mit höchstem Koeffizienten* 1 *ist, für das*

$$(1.5) \qquad \Phi_\mu(x) \mid f(x) \mid x^{p^\mu} - 1 \qquad (0 \leqq \mu \leqq n)$$

mit dem p^μ*-ten Kreisteilungspolynom* $\Phi_\mu(x)$ *gilt. Für den* Γ_p*-Rang gilt somit*

$$\varphi(p^\mu) \leqq \Gamma_p\text{-rg}(\mathfrak{m}) \leqq p^\mu.$$

Die durch (1.5) eindeutig bestimmte Zahl μ heiße der *Exponent* von $\mathfrak{m}$.

Beweis. $\mathfrak{m}$ ist einem torsionsfreien Faktorring S des Gruppenringes $R = \Gamma_p[\mathfrak{h}]$ isomorph. Das Kernideal $\mathfrak{a}$ bei dem dann bestehenden Epimorphismus $\varphi: \Gamma_p[x] \to S$ enthält $x^{p^n} - 1$. Setzt man ein Minimalpolynom aus $\mathfrak{a}$ in

der Form $f_1(x)=p^\varrho x^m+\cdots+a_0$ an, so wird $f_1(x)\mid p^\varrho(x^{p^n}-1)$. Die eindeutige Primzerlegung in $\Gamma_p[x]$ zeigt $f_1(x)=p^\varrho f(x)$ mit einem normierten Polynom $f(x)$ aus $\Gamma_p[x]$. Da S Γ_p-torsionsfrei ist, ist $m>0$ und auch $f(x)$ in $\mathfrak{a}$. Als normiertes Minimalpolynom erzeugt dann f natürlich $\mathfrak{a}$. Ist nun $\mu\leqq n$ der minimale Exponent mit $f(x)\mid x^{p^\mu}-1$, so gilt (1.5), und das Lemma ist bewiesen.

Wir zerlegen nun die Kreiseinheitengruppe $\widetilde{F_\nu^+}$. Führt man mit den Kreiseinheiten $\eta_t^{(\nu)}=\pi_\nu^{+\,t-1}$ die Γ_p-Gruppen $M_\nu^+=[\eta_s^{(\nu)}\mid s\in\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ und $G_\nu^+=[\eta_v^{(\nu)^{(p-1)/2}}\mid v\in\mathfrak{u}^+]$ ein, so gilt wegen $\eta_{v^s}^{(\nu)}=\eta_v^{(\nu)}\eta_s^{(\nu)^v}$ die Kompositumsdarstellung

$$\widetilde{F_\nu^+}=G_\nu^+\prod_{v\in\mathfrak{u}^+}M_\nu^{+\,v}.$$

Da $\mathfrak{h}_1^{(\nu)}$ und $\mathfrak{u}^+$ zyklisch sind, sind nach Hasse [5], II, §10, 11 auch M_ν^+ und G_ν^+ zyklisch bezüglich der Gruppenringe $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ bzw. $\Gamma_p[\mathfrak{u}^+]$, erzeugt von den Einseinheiten $\varepsilon_1^{(\nu)+}=\eta_{s_1}^{(\nu)}$ bzw. $\delta_\nu^{+\,(p-1)/2}=\eta_u^{(\nu)^{(p-1)/2}}$. Daraus entsteht $\widetilde{F_\nu^{+\,e_{2k}}}=G_\nu^{+\,e_{2k}}M_\nu^{+\,e_{2k}}$ mit $G_\nu^{+\,e_0}=1$. Diese Zerlegung ist sogar direkt, falls $G_1^{+\,e_{2k}}\neq 1$, also $\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)e_{2k}}\neq 1$ ist für $k\geqq 1$. Denn Normbildung N_μ^ν von $\mathsf{P}_\nu\mid\mathsf{P}_\mu$ ergibt $\pi_\mu^+=N_\mu^\nu\pi_\nu^+$ $(\mu<\nu)$, und daher $G_\nu^{+\,e_{2k}}\cong N_1^\nu G_\nu^{+\,e_{2k}}=G_1^{+\,e_{2k}}$, während $N_1^\nu M_\nu^{+\,e_{2k}}=1$ ist. Nach dem Gesagten ist p daher k-stabil genau dann, wenn $\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)e_{2k}}\neq 1$ für $k\geqq 1$ und $\Gamma_p\text{-rg}\,(M_\nu^{+\,e_{2k}})=p^{\nu-1}-1$ ist.

Der Beweis von Satz 1 erfolgt nun durch Induktion, indem das Lemma auf die von den $\varepsilon_1^{(\nu)+e_{2k}}=\pi_\nu^{+\,(s_1-1)e_{2k}}$ erzeugten zyklischen und Γ_p-torsionsfreien $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$-Gruppen $M_\nu^{+\,e_{2k}}$ angewendet wird. Ist $f_{\nu,k}(x)$ das in (1.5) auftretende Polynom, so ist wegen $N_1^\nu\varepsilon_1^{(\nu)+e_{2k}}=1$ gewiß $f_{\nu,k}(x)\mid x^{p^{\nu-1}-1}+x^{p^{\nu-1}-2}+\cdots+x+1$. Zum anderen ist der Exponent von $M_\nu^{+\,e_{2k}}$ im Sinn des Lemmas maximal gleich $\nu-1$ genau dann, wenn für $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}-1}$ gilt $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}}\neq 1$. Denn $f_{\nu,k}(x)\mid x^{p^{\nu-2}}-1$ liegt genau dann vor, wenn $1=\varepsilon_1^{(\nu)+e_{2k}(s_1^{p^{\nu-2}}-1)}=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}(s_1-1)}$ ist. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}}$ in Λ_1^+, was durch Normbildung $1=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}p^{\nu-1}}$, also $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}}=1$ zur Folge hat.

Der Normepimorphismus $N_{\nu-1}^\nu\colon M_\nu^{+\,e_{2k}}\to M_{\nu-1}^{+\,e_{2k}}$ bewirkt nun die kommutative Epimorphismenfolge im Sinn des Lemmas:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}] & \to & S_{\nu,k}\cong M_\nu^{+\,e_{2k}} \\ \Gamma_p[x] & \swarrow\searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu-1)}] & \to & S_{\nu-1,k}\cong M_{\nu-1}^{+\,e_{2k}}, \end{array}$$

so daß für die Kernideale $(f_{\nu,k})$ und $(f_{\nu-1,k})$ gilt: $(f_{\nu-1,k})\supseteqq(f_{\nu,k})$, also $f_{\nu-1,k}\mid f_{\nu,k}$.

Nach dem Gesagten ist die Bedingung $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+e_{2k}}\neq 1$ für $\nu\geqq 2$ gleichbedeutend mit $\Phi_{\nu-1}(x)\mid f_{\nu,k}(x)\ \dfrac{x^{p^{\nu-1}}-1}{x-1}$ für alle $\nu\geqq 2$. Für $\nu=2$ ergibt das $f_{2,k}(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1$. Ist schon $f_{\nu-1,k}=\sum_0^{p^{\nu-2}-1}x^j$ bewiesen, so ist $f_{\nu,k}$ durch $\Phi_{\nu-1}(x)$

und $f_{\nu-1,k}(x)$ teilbar, also wegen der Teilerfremdheit beider Polynome auch durch das Produkt. Gradvergleich ergibt in der Tat $f_{\nu,k}(x) = \frac{x^{p^{\nu-1}}-1}{x-1}$, und somit $\Gamma_p\text{-rg}(M_\nu^{+\,e_{2k}}) = p^{\nu-1}-1$.

Es bleibt zu zeigen, daß auf H_ν^+ die Wirkung der Idempotente e_{2k} im wesentlichen mit der von $\Delta_k^+(u)$ übereinstimmt. Nun stimmt e_{2k} auf H_ν^+ mit $e_k^+ = \frac{2}{p-1}\sum_0^{(p-3)/2} w^{+\,-kj} u^j$ überein. Ferner gilt

$$e_k^+ = \frac{2}{p-1} w^{+\,k} \Delta_k^+ \qquad \text{für alle } k.$$

Denn mit

$$\Delta^+(z) = z^{(p-1)/2} - 1 = \prod_0^{(p-3)/2} (z - w^{+\,j})$$

ist

$$\Delta_k^+(z) = \frac{\Delta^+(z)}{z - w^{+\,k}} = w^{+\,-k} \sum_{j=0}^{(p-3)/2} (z w^{+\,-k})^j,$$

also die Behauptung für $z = u$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Weitere Reduktion und die k-Stabilität aller Primzahlen für $k = 0,1$

1. Das Stabilitätskriterium in Satz 1 erfordert die Kenntnis der Wirkung von $u - w^{+\,j}$ auf H_ν^+. Wir setzen dazu eine beliebige ϱ-te Einseinheit γ_ϱ^+ aus H_ν^+ an in der Form

$$\gamma_\varrho^+ = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} a_{\varrho+j} \pi^{+\,\varrho+j} = 1 + \alpha_\varrho \pi^{+\,\varrho} \qquad (a_\varrho \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p},\ \alpha_\varrho \in \Gamma_p). \tag{2.0}$$

Wegen $\gamma_\varrho^{+\,w^{+j}} \equiv 1 + w^{+\,j} \pi^{+\,\varrho} \sum_{i=0}^{\varrho-1} a_{\varrho+i} \pi^{+\,i} \bmod \mathfrak{p}^{+\,2\varrho}$ und $\gamma_\varrho^{+\,-w^{+j}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{+\,\varrho}$ wird dann mit $\delta^+ = \pi^{+\,u-1}$

$$\gamma_\varrho^{+\,u-w^{+j}} \equiv 1 + \pi^{+\,\varrho} \sum_{i=0}^{\varrho-1} a_{\varrho+i} (\delta^{+\,\varrho+i} - w^{+\,j}) \pi^{+\,i} \bmod \mathfrak{p}^{+\,2\varrho}. \tag{2.1}$$

Um die beiden ersten Koeffizienten von δ^+ zu berechnen, ist

$$\delta = \pi^{u-1} = \pi^{-1}(1 - \zeta^w) \equiv w - \binom{w}{2}\pi + \binom{w}{3}\pi^2 \bmod \mathfrak{p}^3$$

mit seinem Konjugierten $\delta' = \pi'^{\,u-1}$ bezüglich P_ν^+ zu multiplizieren:

$$\delta^+ = \delta\,\delta' = w^+ - w\binom{w}{2}\mathrm{Sp}^+(\pi) + \binom{w}{2}^2 N^+(\pi) + w\binom{w}{3}\mathrm{Sp}^+(\pi^2) \bmod \mathfrak{p}^3,$$

also auch mod $\mathfrak{p}^{+\,2}$; hierin ist $w^+ = w^2$ und Sp^+, N^+ bezeichnen die Spur bzw. Norm von $\mathsf{P}_\nu | \mathsf{P}_\nu^+$. Wegen $\pi^+ = \mathrm{Sp}^+(\pi) = N^+(\pi)$ und $\pi^2 = -\zeta\pi^+$, also $\mathrm{Sp}^+(\pi^2) = -2\pi^+ + \pi^{+\,2}$, ergibt sich:

$$\delta^+ \equiv w^+ - \tfrac{1}{12} w^+(w^+ - 1)\pi^+ \bmod \mathfrak{p}^{+\,2}. \tag{2.2}$$

Trägt man

$$\delta^{+\varrho+i} - w^{+j} \equiv (w^{+\varrho+i} - w^{+j}) - (\varrho+i)\tfrac{1}{12} w^{+\varrho+i}(w^+ - 1)\pi^+ \bmod \mathfrak{p}^{+2}$$

in (2.1) ein und vergröbert mod $\mathfrak{p}^{+\varrho+2}$, so erhält man

$$(2.3)\quad \begin{cases} \gamma_\varrho^{+u-w^{+j}} = 1 + a_\varrho(w^{+\varrho} - w^{+j})\pi^{+\varrho} + \\ \qquad + [a_{\varrho+1}(w^{+\varrho+1} - w^{+j}) - a_\varrho \tfrac{1}{12}\varrho\, w^{+\varrho}(w^+ - 1)]\pi^{+\varrho+1} \bmod \mathfrak{p}^{+\varrho+2}. \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$(2.4)\qquad \gamma_\varrho^{+\Delta_k^+(u)} \equiv 1 + a_\varrho \Delta_k^+(w^{+\varrho})\pi^{+\varrho} \not\equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{+\varrho+1}$$

genau dann der Fall, wenn $\Delta_k^+(w^{+\varrho}) \neq 0$, also $\varrho = k \bmod (p-1)/2$ gilt.

Da sich die Einseinheiten aus der k-ten Komponente $\mathsf{H}_\nu^{+\varepsilon_k^+}$ bei Anwendung von $\Delta_k^+(u)$ im wesentlichen reproduzieren, speziell also (2.4) erfüllen, gilt:

Die Einheiten aus $\mathsf{H}_\nu^{+\varepsilon_{2k}}$ *haben sämtlich einen Index* $\equiv k \bmod (p-1)/2$. Entsprechendes gilt auch für die Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{\varepsilon_i}$ von H_ν.

2. Für das folgende hinreichende Stabilitätskriterium wird die Kenntnis des Koeffizienten von $\pi^{+\varrho+1}$ in (2.3) für $\gamma_\varrho^+ = \varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ noch nicht benötigt. Wir führen die Teilprodukte $T_j = \prod_0^j (u - w^{+i})$ ein mit den Indizes $\varrho_j = \mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+T_j})$. Die mod $\mathfrak{p}^{+\varrho+1}$ vergröberte Kongruenz (2.3) zeigt dann, daß $\varrho_j > \varrho_{j-1}$ genau dann vorliegt, wenn $j \equiv \varrho_{j-1} \bmod (p-1)/2$. Danach ergibt sich bei Anwendung von $\prod_{j+1}^{(p-3)/2} (u - w^{+i})$ auf $\gamma_\varrho^{+T_{j-1}}$ keine Indexänderung, es gilt also in diesem Fall

$$\mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\Delta_j^+}) \equiv j \mod (p-1)/2.$$

Beachtet man noch, daß $T_{(p-3)/2}$ der 0-Operator, also $\varrho_{(p-3)/2} = \infty$ ist, so ist damit das folgende Kriterium bewiesen:

Für eine ϱ*-te Einseinheit* γ_ϱ^+ *aus* H_ν^+ *seien* $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r+1} \leqq \dfrac{p-3}{2}$ *die Sprungstellen der Indizes* $\varrho_j = \mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+T_j})$:

$$\varrho \leqq \varrho_0 = \cdots = \varrho_{k_1-1} < \varrho_{k_1} = \cdots = \varrho_{k_2-1} < \cdots < \varrho_{k_{r+1}} = \cdots = \varrho_{(p-3)/2} = \infty.$$

Dann gilt für diese k_i

$$\mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\Delta_{k_i}^+}) \equiv k_i \mod (p-1)/2,$$

insbesondere also $\gamma_\varrho^{+\Delta_{k_i}^+} \neq 1$.

Tritt daher eine Zahl k *zwischen* 0 *und* $(p-3)/2$ *für jedes* $\nu \geqq 2$ *als Sprungstelle der Indizes* $\varrho_j^{(\nu)} = \mathrm{ind}^+(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+T_j})$ *auf, so ist* p k*-stabil genau dann, wenn* (b) *aus Satz* 1 *erfüllt ist.*

3. Zum Nachweis der k-Stabilität für $k=0, 1$ benötigt man eine genauere Kenntnis der kritischen Einseinheit $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}-1}$. Ihr Index berechnet sich leicht zu

$$\mathrm{ind}^+(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+})=(p^{\nu-1}-1)/2.$$

Denn wegen $s_{\nu-1}=s_1^{p^{\nu-2}}$ und $(1+p)^{p^{\nu-2}}\equiv 1+cp^{\nu-1} \bmod p^\nu$ mit $c\not\equiv 0 \bmod p$ gilt $\zeta_\nu^{s_{\nu-1}}=\zeta_\nu\zeta_1^c$. Also hat zunächst die Einseinheit

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}=1+\zeta_\nu\beta\pi_1\pi_\nu^{-1} \quad \text{mit der Einheit} \quad \beta=\pi_1^{-1}(1-\zeta_1^c) \tag{2.5}$$

den Index $p^{\nu-1}-1$ bezüglich $\mathfrak{p}_\nu$, was durch Normbildung $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=N^+\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}$ die Behauptung für $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ ergibt.

Die 0-Stabilität aller Primzahlen folgt nun aus (2.4) für $\gamma_\varrho^+=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$, indem man $\varrho\equiv 0 \bmod (p-1)/2$ beachtet. Oder man schließt direkt nach Satz 1 auf Grund von $(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+})^{\frac{1}{2}(p-1)e_\varrho^+}=\bar\pi_\nu^{s_{\nu-1}-1}\not\equiv 1$ mit $\bar\pi_\nu=\bar N\pi_\nu$.

Für $k=1$ erhält man aus (2.3) für $\gamma_\varrho^+=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ wegen $\varrho=(p^{\nu-1}-1)/2$

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\,\Delta_1^+(u)}\equiv 1+\Delta_1^+(w^+)\left(a_{\varrho+1}+\frac{1}{24}a_\varrho\right)\pi^{+\,\varrho+1} \bmod \mathfrak{p}^{+\,\varrho+2}. \tag{2.6}$$

Es ist also die Berechnung der Koeffizienten a_ϱ, $a_{\varrho+1}$ von $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ erforderlich. Trägt man die bekannte Beziehung $\pi_1\pi_\nu^{-1}\equiv\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1} \bmod p$ (HASSE [4], S. 180) in (2.5) ein und beachtet $\beta\equiv c \bmod \mathfrak{p}_1$, so wird

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}\equiv 1+c\zeta_\nu\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1} \bmod \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}+2}.$$

Multiplikation mit der Konjugierten $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)'}$ bezüglich P_ν^+ ergibt

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}\equiv 1+c\,\mathrm{Sp}^+\left(\zeta_\nu\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1}\right) \bmod \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}+2} \quad (p\geqq 5), \tag{2.7}$$

wenn man beachtet, daß das Glied $c^2\pi_\nu^{+\,p^{\nu-1}-1}$ fortfällt für $p\geqq 5$. Wegen $\pi_\nu^2=-\zeta_\nu\pi_\nu^+$ ist $\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu\pi_\nu^{2\varrho})=(-1)^\varrho\,\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu^{\varrho+1})\pi_\nu^{+\,\varrho}$. Auf Grund der Kongruenz $\zeta_\nu^{\varrho+1}\equiv 1-(\varrho+1)\pi_\nu+\binom{\varrho+1}{2}\pi_\nu^2 \bmod \mathfrak{p}_\nu^3$ und der schon verwendeten Beziehung $\mathrm{Sp}^+(\pi_\nu^2)=-2\pi_\nu^+ +\pi_\nu^{+\,2}$ wird dann

$$\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu^{\varrho+1})\equiv 2-(\varrho+1)^2\pi_\nu^+ \bmod \mathfrak{p}_\nu^{+\,2}.$$

Zusammen ergibt sich somit wegen $\varrho=(p^{\nu-1}-1)/2\equiv(\nu-1)(p-1)/2 \bmod 2$:

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}\equiv 1+(-1)^{(\nu-1)(p-1)/2}c\left(2\pi_\nu^{+\,\varrho}-\frac{1}{4}\pi_\nu^{+\,\varrho+1}\right) \bmod \mathfrak{p}_\nu^{+\,\varrho+2}. \tag{2.8}$$

Die Forderung $a_{\varrho+1}+\frac{1}{24}a_\varrho\not\equiv 0 \bmod p$ in (2.6) läuft somit auf die Bedingung $p\geqq 5$ zurück. Damit ist für $p\geqq 5$ stets $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\,\Delta_1^+}\not\equiv 1$ gezeigt, was für die regulären Primzahlen 2 und 3 erst recht der Fall ist, da sie ja stabil sind.

Nach Satz 1 sind daher alle Primzahlen 1-stabil, wenn für die Einheit $\delta_1^+=\pi_1^{+\,u-1}$

$$\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)\Delta_1^+}\not\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_1^{+\,2}$$

gezeigt werden kann. Nach (2.2) ist nun aber $\mathrm{ind}^+(\delta_1^{+(p-1)/2}) = 1$, also nach (2.4) auch $\mathrm{ind}^+(\delta_1^{+\frac{1}{2}(p-1)} \Delta_1^+) = 1$, was die Behauptung ergibt. Wir haben also bewiesen:

Satz 2. *Alle Primzahlen sind k-stabil für $k=0$ und 1.*

Die Untersuchung der k-Stabilität für $k \geqq 2$ erfordert nach (2.1) die Kenntnis der höheren Koeffizienten von δ_ν^+ und $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$.

§ 3. Die Erzeugung von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ aus $1+p$ und der Kreiseinheitengruppe $\tilde{\bar{F}}_\nu$

Mit der 0-Stabilität aller Primzahlen $p \neq 2$ haben wir gezeigt, daß die Kreiseinheitengruppe $\tilde{\bar{F}}_\nu = [\bar{\pi}_\nu^{s-1} \mid s \in \mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ $(= M_\nu^{+\varepsilon_0})$ der Fixkörper $\bar{\Lambda}_\nu$ von $\mathfrak{u}$ in den Λ_ν als Γ_p-Gruppe maximalen Rang $p^{\nu-1}-1$, also in $\bar{\mathsf{N}}_\nu$ endlichen Index hat; hierbei ist $\bar{\pi}_\nu = \bar{N}\pi_\nu$ das normierte Primelement von $\bar{\Lambda}_\nu$. Nun hat Hasse in [6], S. 15 für $p=2$ bewiesen, daß darüber hinaus die Kreiseinheiten bereits die volle Einseinheitengruppe des maximal-reellen Teilkörpers erzeugen. Der analoge Sachverhalt besteht im Fall $p \neq 2$ auch für die Körper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$:

Satz 3. *In $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ gilt für $p \neq 2$ stets $\bar{\mathsf{N}}_\nu = \tilde{\bar{F}}_\nu$, also für die volle Einseinheitengruppe*

$$\bar{\mathsf{H}}_\nu = [1+p] \times \tilde{\bar{F}}_\nu .$$

Beweis. Die Wirkung des Operators $\sigma_\mu = s_\mu - 1$ auf eine genaue ϱ-te Einseinheit $\bar{\gamma}_\varrho$ von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ ergibt:

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\bar{\gamma}_\varrho^{\sigma_\mu}) \geqq \varrho + \frac{p^\mu - 1}{p-1} \tag{3.1}$$

und sogar $= \varrho + \frac{p^\mu - 1}{p-1}$ für $\varrho \not\equiv 0 \bmod p$.

Zum Beweis betrachten wir ϱ-te Einseinheiten γ_ϱ in Λ_ν in der Darstellung (2.0) und bilden

$$\gamma_\varrho^{\sigma_\mu} = 1 + \gamma_\varrho^{-1} \pi^\varrho \sum_{j=0}^{\infty} a_{\varrho+j} (\varepsilon_\mu^{\varrho+j} - 1) \pi^j \tag{3.2}$$

mit $\varepsilon_\mu = \pi^{\sigma_\mu}$. Nun kann, etwas allgemeiner als in §2 auf Grund von (2.5), leicht $\mathrm{ind}\,(\varepsilon_\mu) = p^\mu - 1$ gezeigt werden. Aus (3.2) ergibt sich dann $\mathrm{ind}\,(\gamma_\varrho^{\sigma_\mu}) \geqq \varrho + p^\mu - 1$, und das Gleichheitszeichen steht genau für $\varrho \not\equiv 0 \bmod p$. Für $\bar{\gamma}_\varrho$ aus $\bar{\Lambda}_\nu$ ist daher $\mathrm{ind}\,(\bar{\gamma}_\varrho^{\sigma_\mu}) \geqq$ bzw. $= \varrho(p-1) + p^\mu - 1$, was (3.1) ergibt.

Für die erzeugende Kreiseinheit $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{N}\varepsilon_1$ gilt wegen $\mathrm{ind}\,(\varepsilon_1) = p-1$:

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\bar{\varepsilon}_1) = 1 . \tag{3.3}$$

Es soll gezeigt werden, daß die $p^{\nu-1}-1$ Einseinheiten $\bar{\varepsilon}_1^{\sigma_1^i}$ $(\sigma_1 = s_1 - 1;$ $i = 0, \ldots, p^{\nu-1} - 2)$ zusammen mit $1+p$ die volle Gruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ erzeugen.

Nach dem bekannten Aufbau der Einseinheitengruppen lokaler Körper (s. etwa Hasse [4], §15, S. 173) erhält man eine Γ_p-Basis von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ in den „elementaren Einseinheiten"

$$\bar{\eta}_\varrho = 1 + a_\varrho \bar{\pi}_\nu^\varrho \qquad (a_\varrho \text{ ganzrational} \not\equiv 0 \bmod p),$$

wo ϱ alle zu p primen Zahlen $\leqq \frac{p^\nu - 1}{p-1}$ durchläuft. Offenbar ist dabei die Voraussetzung a_ϱ ganzrational entbehrlich: Jedes System $\left\{\bar{\gamma}_\varrho \mid 1 \leqq \varrho \leqq \frac{p^\nu - 1}{p-1},\ \varrho \not\equiv 0 \bmod p\right\}$ von genauen ϱ-ten Einseinheiten $\bar{\gamma}_\varrho$ ist eine Γ_p-Basis von $\overline{\mathsf{H}}_\nu$. Denn bei einer Darstellung $\bar{\gamma}_\varrho = \prod \bar{\eta}_j^{\alpha_{j\varrho}}$ $(\alpha_{j\varrho} \in \Gamma_p)$ durch die Basis $\bar{\eta}_j$ muß $\alpha_{j\varrho} \equiv 0 \bmod p$ für $j < \varrho$ und $\alpha_{\varrho\varrho} \not\equiv 0 \bmod p$ gelten, so daß die Determinante der Übergangssubstitution $|\alpha_{j\varrho}| \equiv \prod_\varrho \alpha_{\varrho\varrho} \not\equiv 0 \bmod p$ ausfällt.

Es genügt offenbar zu zeigen, daß $\overline{\overline{F}}_\nu$ zusammen mit einem weiteren Basiselement $\bar{\eta}$, etwa $1+p$, modulo $\overline{\mathsf{H}}_\nu^p$ ganz $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ erzeugt. Dazu wird rekursiv ein System $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}-1}$ aus $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

(α) $\qquad \beta_0 = \bar{\varepsilon}_1$

(β) $\qquad \beta_j \underset{p}{=} \beta_{j-1}^{\sigma_1^{p-1}}$ [3]) $\qquad \left(j \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1\right)$

(γ) $\qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_j) = 1 + j\,p.$

Nach (3.3) hat $\beta_0 = \bar{\varepsilon}_1$ die Eigenschaft (γ), während (β) für $j=0$ bedeutungslos ist. Seien die β_j mit $j \leqq k < \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1$ und (α) bis (γ) bereits konstruiert. Nach (3.1) für $\mu = 1$ und wegen (γ) für $j = k$ gilt dann

$$(3.4) \qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^i}) = \begin{cases} 1 + k\,p + i & 0 \leqq i \leqq p-2 \\ (k+1)\,p & i = p-1. \end{cases}$$

Demnach ist wegen $k+1 \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ nach dem bekannten Verhalten der Einseinheiten bei Potenzierung mit p (HASSE [4], §15, S. 168)

$$\beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \equiv \bar{\eta}_{k+1}^p \mod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{(k+1)\,p+1}$$

mit $\bar{\eta}_{k+1} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{k+1}$, und daher

$$(3.5) \qquad \beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \underset{p}{=} \beta_{k+1} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1}) \geqq (k+1)\,p + 1$$

mit einer gewissen Einseinheit $\beta_{k+1} = \beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \bar{\eta}_{k+1}^{-p}$. Nun ist innerhalb des Gruppenringes $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ sicher $\sigma_1^p \equiv \sigma_2 \bmod p$. Folglich gilt für $\beta_k^{\sigma_1^p} \underset{p}{=} \beta_k^{\sigma_2}$ nach (γ) für $j = k$ und (3.1) für $\mu = 2$ jedenfalls $\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_2}) = 1 + k\,p + p + 1 = (k+1)\,p + 2$. Da dieser Index wegen $p \neq 2$ prim zu p ist und nach (3.4) und (3.1) gewiß $\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) \geqq (k+1)\,p + 1$ gilt, folgt

$$(3.6) \qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) \leqq (k+1)\,p + 2.$$

[3]) Das Zeichen „$\underset{p}{=}$" bedeutet Gleichheit bis auf eine p-te Potenz.

Andererseits ist nach (3.5)

$$\beta_k^{\sigma_1^p} = \bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1 p} \beta_{k+1}^{\sigma_1} \equiv \beta_{k+1}^{\sigma_1} \mod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{p^{(k+2)}}; \tag{3.7}$$

denn nach (3.1) ist $\bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{k+2}$, also wegen $k+2 \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ gewiß $\bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1 p} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{(k+2)p}$[4]). Vergleich von (3.7) mit (3.6) ergibt wegen $(k+1)p+2<(k+2)p$

$$\overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) = \overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_{k+1}^{\sigma_1}). \tag{3.8}$$

Beachtet man nach (3.1) $\overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_{k+1}^{\sigma_1}) \geqq \overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_{k+1}) + 1$, so ergeben (3.5) bis (3.8) die Ungleichung

$$\overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_{k+1}) + 1 \leqq \overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) \leqq (k+1)p + 2 \leqq \overline{\operatorname{ind}}\,(\beta_{k+1}) + 1,$$

woraus in der Tat (γ) für $j = k+1$ folgt. Andererseits erfüllt β_{k+1} nach Definition (3.5) die Bedingung (β) für $j = k+1$, womit die Konstruktion der β durchgeführt ist.

Nun zeigen (γ) und (3.4), daß die Indizes der $p^{\nu-1}-1$ Einseinheiten

$$\beta_k^{\sigma_1^i} \qquad \left(i = 0, \ldots, p-2;\ k = 0, \ldots, \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1\right) \tag{3.9}$$

genau die zu p primen Zahlen zwischen 1 und $\frac{p^\nu - 1}{p-1} - 2$ durchlaufen. Sie stellen nach der Vorbemerkung daher zusammen mit einer genauen $\left(\frac{p^\nu-1}{p-1}\right)$-ten Einseinheit eine Basis von $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ dar. Statt letzterer Einseinheit kann dann auch $1+p$ genommen werden.

Geht man in (β) sukzessive auf den Index $j=0$ zurück, so sieht man, daß jedes solche Basiselement aus (3.9) mod $\overline{\mathsf{H}}_\nu^p$ einem Element $\bar{\varepsilon}_1^{\sigma_1^i}$ aus $\widetilde{\widetilde{F}}_\nu$ kongruent ist. Damit ist nach dem Gesagten der Satz bewiesen.

Als erste Folgerung gewinnt man, wie für $p=2$ bei Hasse [6], den bekannten Satz, daß $\bar{h}_{\nu p} = (\widetilde{\widetilde{\mathsf{E}}}_\nu : \widetilde{\widetilde{F}}_\nu) = 1$ für alle ν ist[5]). Ferner wird durch Satz 3 die Struktur der vollen Einseinheitengruppe $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ als $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$-Operatorgruppe aufgeklärt:

$$\overline{\mathsf{H}}_\nu \cong \Gamma_p \oplus \left(\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]/\tau_\nu \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]\right) \quad \text{mit} \quad \tau_\nu = \sum_{j=0}^{p^{\nu-1}-1} s_1^j\ ^{6}).$$

Literatur

[1] Artin, E.: Representatives of the connected component of the idèle class group. Intern. Symp. on Algebr. Number Theory, Tokyo 1955, 51–54.

[2] Chevalley, C.: Deux théorèmes d'arithmétique. J. Math. Soc. Japan **3**, 36–44 (1951).

[4]) Hier wird für die p-Potenzierungsregel wesentlich verwendet, daß $k < \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1$ vorausgesetzt war.

[5]) Dies kann auch begrifflich aus der Hilbertschen Theorie (Fröhlich [3]), der Klassenkörpertheorie (Iwasawa [7]), oder aus der allgemeinen Theorie der Γ-Erweiterungen (Iwasawa [8], p. 225, Serre [13], Théorème 1) gewonnen werden.

[6]) Vgl. das allgemeine Theorem 19 in der Iwasawaschen Arbeit [9].

[3] Fröhlich, A.: On a method of determination of class number factors in number fields. Mathematica **4**, 113—121 (1957).
[4] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.
[5] — Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Monographie Berlin 1952.
[6] — Die dyadische Einseinheitenoperatorgruppe zum Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln nebst Anwendung auf die Klassenzahl seines größten reellen Teilkörpers. Revue de la Faculté des Sciences de l'Univ. Instanbul **20**, 7—16 (1955).
[7] Iwasawa, K.: A note on class numbers of algebraic number fields. Abh. Math. Sem. Hamburg **20**, 257—258 (1956).
[8] — On Γ-Extensions of algebraic number fields. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 183—226 (1959).
[9] — On the theory of cyclotomic fields. Ann. of Math. **70**, 530—561 (1959).
[10] Jehne, W.: Bemerkung über die p-Klassengruppe p^ν-ter Kreiskörper. Archiv d. Math. **10**, 422—427 (1959).
[11] Leopoldt, H. W.: Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln modulo p. Rend. Circ. Mat. Palermo **9**, 1—12 (1960).
[12] Schmidt, F. K.: Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. J. reine angew. Math. **162**, 155—168 (1930).
[13] Serre, J. P.: Classes des corps cyclotomiques. Seminaire Bourbaki 1958/59, Expos. 174, 01—11.
[14] Weil, A.: Sur la théorie du corps de classes. J. Math. Soc. Japan **3**, 1—35 (1951).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. April 1961)

Habetha, Kl.
Math. Zeitschr. 77, 453–467 (1961)

Über die Werteverteilung in Winkelräumen

Von
Klaus Habetha

Einleitung

Im folgenden soll die Werteverteilung von Funktionen $w(z)$ untersucht werden, die in einem Winkelraum

$$H_{r_0}^k = \left\{ z \,|\, r_0 \leqq |z| < \infty,\ |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2k};\ k \geqq \frac{1}{2},\ r_0 > 0 \right\} \tag{0.1}$$

eindeutig und meromorph sind. An Literatur sind vor allem eine Arbeit von R. Nevanlinna [10] und eine Note von J. Dufresnoy [6] zu nennen.

Das Problem kann einerseits mit einer Ausschöpfung von $H_{r_0}^k$ durch Gebiete behandelt werden, deren Ränder keine Punkte mit dem Rand von $H_{r_0}^k$ gemeinsam haben (etwa entsprechend af Hällström [8]). Das führt im wesentlichen auf die bekannten Untersuchungen der Werteverteilung von Funktionen, die im Einheitskreis meromorph sind. Dabei wäre als zusätzliche Voraussetzung gegeben, daß auf $|z| = 1$ eine wesentliche Singularität nur für $z = 1$ vorliegt.

Angemessener erscheint die Ausschöpfung von $H_{r_0}^k$ durch die Gebiete

$$G_r^k = \left\{ z \,|\, r_0 < |z| < r,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2k} \right\}, \tag{0.2}$$

denn dabei wird die Sonderstellung des Punktes $z = \infty$ betont. Hier treten im Restglied des 2. Hauptsatzes Integrale über die Werte von $w(z)$ auf dem Rand von $H_{r_0}^k$ auf. In den genannten Abhandlungen werden diese Ausdrücke mit Hilfe einer Poissonschen Formel für $\log w(z)$ in einem größeren Winkelraum abgeschätzt, dort muß $w(z)$ natürlich meromorph sein.

In dieser Arbeit soll versucht werden, die Werteverteilung in $H_{r_0}^k$ zu behandeln, ohne Eigenschaften von $w(z)$ in Punkten außerhalb des Winkelraumes zu verwenden. Für die Halbebene hat der Verfasser dieses Problem in [7] mit Hilfe besonderer Charakteristiken untersucht, hier soll die Nevanlinnasche Charakteristik — in der Form von Shimizu und Ahlfors — zugrunde gelegt werden.

§ 1 enthält den 1. Hauptsatz, § 2 eine teilweise Abschätzung des Restgliedes im 2. Hauptsatz und eine daraus folgende Defektrelation. Der Inhalt dieser beiden Paragraphen ist — zumindest der Methode nach — bekannt, die Darstellung wurde daher kurz gefaßt (vgl. A. Dinghas [2, 4]). In § 3 wird der 2. Hauptsatz über k integriert, wobei sich das Randintegral in ein Flächenintegral verwandelt und weiter abgeschätzt werden kann. Dabei ist es möglich, nach der von L. Ahlfors [1] angegebenen Methode vorzugehen;

ferner bereitet es keine Schwierigkeiten, sich auf eine Umgebung der wesentlichen Singularität zu beschränken (vgl. für die Vollebene A. DINGHAS [5]). Geht man im Restglied zu Abschätzungen durch die Charakteristik eines größeren Winkelraumes über, so gewinnt man nicht die Ergebnisse von J. DUFRESNOY [6] wieder. Das ist auch nicht zu erwarten, da bei dem hier gegebenen Beweis $w(z)$ in beliebiger Nähe des Randes von $H^k_{r_0}$ wesentliche Singularitäten haben kann, so daß die schärfere Voraussetzung von DUFRESNOY nicht ausgenutzt wird.

§ 1. Der erste Hauptsatz

Da fast alle auftretenden Größen von k abhängen, wird der Index k außer in Definitionen im allgemeinen fortgelassen. Der Untersuchung liegt die Formel

$$\text{(I.1)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\nu \lambda(z_\nu) - \sum_\mu \lambda(z_\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left(\log|f| \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial}{\partial n} \log|f| \right) ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_G \log|f| \, \Delta\lambda \, d\sigma \end{aligned} \right.$$

von F. und R. NEVANLINNA [9] zugrunde. Dabei sei $f(z)$ im Gebiet G und auf dessen Rand Γ meromorph, $\lambda(z)$ dort reell und zweimal stetig differenzierbar. $\partial/\partial n$ sei die Ableitung nach der inneren Normalen von Γ, Γ sei stückweise stetig gekrümmt. z_ν durchlaufe die Nullstellen von $f(z)$ in G, z_μ die Pole, immer in entsprechender Vielfachheit gezählt, auf Γ sei $f(z) \neq 0, \infty$.

Mit den Definitionen

$$\text{(I.2)} \qquad \gamma^k_r = \left\{ z \,|\, r_0 \leqq |z| \leqq r, \ \arg z = \pm \frac{\pi}{2k} \right\},$$

$$\text{(I.3)} \qquad \Gamma^k_r = \left\{ z \,|\, |z| = r, \ |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2k} \right\}$$

und der Festsetzung

$$\text{(I.4)} \qquad \lambda(z) = \operatorname{Re}(z^k) = |z|^k \cos k\varphi$$

wird (I.1) auf das Gebiet G_r (0.2) und die Funktion

$$\text{(I.5)} \qquad f(z) = \frac{w-a}{w-b} \cdot \frac{\sqrt{1+|b|^2}}{\sqrt{1+|a|^2}}$$

angewendet. Mit dem chordalen Abstand

$$\text{(I.6)} \qquad [w, a] = \frac{w-a}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|a|^2}}$$

ergibt sich, falls $w(z) \neq a, b$ auf dem Rand von G_r ist,

$$\text{(I.7)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\nu r^k_\nu \cos k\varphi_\nu - \sum_\mu r^k_\mu \cos k\varphi_\mu &= \frac{k}{2\pi} \int_{\gamma_r} \log \frac{[w,a]}{[w,b]} |z|^{k-1} d|z| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r - \Gamma_{r_0}} \left(-k r^k \log \frac{[w,a]}{[w,b]} + r^{k+1} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{[w,a]}{[w,b]} \right) \cos k\varphi \, d\varphi . \end{aligned} \right.$$

Dabei durchlaufe $z_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ die a-Stellen, z_μ die b-Stellen von $w(z)$ in G_r; nach einem üblichen Grenzübergang können a- bzw. b-Stellen von $w(z)$ auf γ_r zugelassen werden. Das Integral über γ_r besteht nach (I.2) aus zwei Linienintegralen, in denen jeweils $|z|$ von r_0 bis r läuft. Für $w(z) \neq a$ auf Γ_r und Γ_{r_0} ist also der Ausdruck

$$\text{(I.8)} \quad \left\{ \begin{aligned} S_k(r|r_0) = {} & \sum_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}} r_\nu^k \cos k\varphi_\nu + \frac{k}{2\pi} \int_{\gamma_r} |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| + \\ & + \left[r^{2k+1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \frac{1}{[w,a]} \cos k\varphi \, d\varphi \right]_{r_0}^{r} \end{aligned} \right.$$

von a unabhängig. Führt man die Abkürzungen

$$\text{(I.9)} \quad n_k(r,a) = \sum_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}} r_\nu^k \cos k\varphi_\nu,$$

$$\text{(I.10)} \quad m_k(r,a) = \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \frac{1}{[w,a]} \cos k\varphi \, d\varphi,$$

$$\text{(I.11)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_k(r,a) = {} & \frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_r} \left(\frac{1}{|z|^{2k}} - \frac{1}{r^{2k}} \right) |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| \end{aligned} \right.$$

ein, so schreibt sich (I.8) in der Form

$$\text{(I.12)} \quad S(r|r_0) = n(r,a) + r^{2k+1}\left(m'(r,a) + \mu'(r,a)\right) - r_0^{2k+1} m'(r_0,a).$$

(I.12) wird durch r^{2k+1} dividiert und von r_0 bis r integriert. Wegen der Stetigkeit der beteiligten Summanden bezüglich r kann dann die Voraussetzung $w(z) \neq a$ auf Γ_r fallengelassen werden.

Mit den weiteren Bezeichnungen

$$\text{(I.13)} \quad T_k(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{S_k(t|r_0)}{t^{2k+1}}\, dt,$$

$$\text{(I.14)} \quad N_k(r,a) = \int_{r_0}^{r} \frac{n_k(t,a)}{t^{2k+1}}\, dt = \frac{1}{2k} \sum_\nu \left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}} \right) \cos k\varphi_\nu$$

erhält man den

1. Hauptsatz: *Ist $w(z)$ in $H_{r_0}^k$ eindeutig und meromorph und beachtet man die Definitionen* (I.8—11) *und* (I.13—14), *so ist der Ausdruck*

$$\text{(I.15)} \quad T(r|r_0) = N(r,a) + m(r,a) + \mu(r,a) - m(r_0,a) + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k} - 1 \right) m'(r_0,a)$$

von a unabhängig. Dabei ist die rechte Seite nur definiert, wenn auf Γ_{r_0} $w(z) \neq a$ ist.

Aus diesem Satz sollen nun die Integraldarstellung von $T(r|r_0)$ nach SHIMIZU und AHLFORS sowie eine für den 2. Hauptsatz wichtige Ungleichung hergeleitet werden.

Dazu multipliziere man (I.15) mit dem sphärischen Flächenelement

$$d\omega(a) = \frac{|a|\,d|a|\,d\alpha}{(1+|a|^2)^2} \qquad (a = |a|e^{i\alpha}) \tag{I.16}$$

und integriere über die a-Ebene E. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} T(r|r_0) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_E n(t,a)\,d\omega(a) + \frac{1}{4k}\left(\frac{r_0^k}{r^{2k}} - \frac{1}{r_0^k}\right) + \\ & + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1\right)\iint_E m'(r_0,a)\,d\omega(a), \end{aligned}\right. \tag{I.17}$$

dabei ist die Gleichung

$$\iint_E \log\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a) = \frac{\pi}{2}$$

(unabhängig von w) berücksichtigt worden. Das letzte Integral in (I.17) ist endlich, denn bis auf die Menge

$$E_0 = \{a \mid w(z) = a,\ z \in \Gamma_{r_0}\}$$

vom sphärischen Maß 0 ist $m'(r_0, a)$ nach (I.15) gleich einer über E integrierbaren Funktion, also selbst integrierbar. Aus der bekannten Beziehung

$$\iint_E n(t,a)\,d\omega(a) = \iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma \tag{I.18}$$

erhält man schließlich mit von r unabhängigen C_0 und C_1

$$T(r|r_0) = \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma + \frac{C_0}{r^{2k}} + C_1. \tag{I.19}$$

Das ist die Integraldarstellung von $T(r|r_0)$, aus der sofort die Konvexität von $T(r|r_0)$ als Funktion von r^{-2k} folgt (DINGHAS [3] für den Fall der Halbebene). Ferner ist

$$T_{k_1}(r|r_0) \geqq T_{k_2}(r|r_0) + O(1) \qquad (k_1 \leqq k_2), \tag{I.20}$$

da bei wachsendem k das Integrationsgebiet des Flächenintegrals kleiner wird und $|z|^k t^{-2k}\cos k\varphi$ für $t \geqq 1$ monoton abnimmt.

Zum Beweis der oben erwähnten Ungleichung seien nach AHLFORS $a_1, \ldots, a_q$ verschiedene komplexe Zahlen und

$$\varrho(a) = C\,\Pi^{-2}\log^{-2}\Pi \qquad \left(\Pi = \prod_{\nu=1}^{q}[a, a_\nu]\right). \tag{I.21}$$

Die Konstante C werde so bestimmt, daß

$$\iint_E \varrho(a)\,d\omega(a) = 1 \tag{I.22}$$

ist; dieses Integral existiert.

Aus dem 1. Hauptsatz (I.15) ergibt sich nun die Ungleichung

$$T(r|r_0) \geqq N(r,a) - m(r_0,a) + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1\right) m'(r_0,a), \tag{I.23}$$

die mit $\varrho(a)\, d\omega(a)$ multipliziert und über E integriert werden soll. Dabei muß die Existenz von

$$\iint_E m'(r_0,a)\,\varrho(a)\,d\omega(a) \tag{I.24}$$

geprüft werden. Nimmt $w(z)$ auf Γ_{r_0} die Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ nicht an, so ist

$$\min_{\nu=1,\ldots,q}\left\{\min_{z\in\Gamma_{r_0}}[w(z), a_\nu]\right\} = \delta > 0$$

und die Integrale

$$\iint_E \varrho(a)\log\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a), \qquad \iint_E \varrho(a)\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a) \tag{I.25}$$

existieren und lassen sich durch nur von δ und den a_ν abhängige Konstanten abschätzen. Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß in genügend kleinen Umgebungen der a_ν $[w,a] \geqq \delta/2$ ist. Schließlich läßt sich auf Grund der Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}\right| \leqq \frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}$$

(s. Dinghas [5], S. 398) das betrachtete Integral (I.24) auf einen Ausdruck zurückführen, der die Integrale aus (I.25) enthält. Damit bleibt (I.24) beschränkt und die Integration von (I.23) liefert

$$T(r|r_0) \geqq \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_E n(t,a)\,\varrho(a)\,d\omega(a) + O(1). \tag{I.26}$$

Wird zur Abkürzung

$$S_{k\varrho}(r|r_0) = \iint_{G_r}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma \tag{I.27}$$

und

$$T_{k\varrho}(r|r_0) = \int_{r_0}^{r}\frac{S_{k\varrho}(t|r_0)}{t^{2k+1}}\,dt \tag{I.28}$$

gesetzt, so folgt mit einer (I.18) entsprechenden Beziehung aus (I.26)

$$T(r|r_0) \geqq T_\varrho(r|r_0) + O(1). \tag{I.29}$$

Für die Restgliedabschätzung in § 3 werden noch zwei Funktionen eingeführt, die sich von den obigen durch das Fehlen von $\cos k\varphi$ in den Flächenintegralen unterscheiden:

$$Z_k(r|r_0) = \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\,d\sigma, \tag{I.30}$$

$$Z_{k\varrho}(r|r_0) = \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\,|z|^k\,d\sigma. \tag{I.31}$$

Diese Ausdrücke betonen die Werte in der Nähe des Randes γ_r stärker als die eigentlichen Charakteristiken.

§ 2. Der zweite Hauptsatz (Anfang)

In diesem Paragraphen soll in bekannter Weise der 2. Hauptsatz aufgestellt und eine teilweise Abschätzung des Restgliedes durchgeführt werden. Daraus läßt sich dann eine Defektrelation gewinnen.

Wieder nehme $w(z)$ auf Γ_{r_0} die q verschiedenen komplexen Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ nicht an. Ebenso sei dort $w'(z) \neq 0, \infty$, das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man immer r_0 geeignet wählen kann. Eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ kann gleich ∞ sein.

Die Größe

$$N_1(r) = 2N(r, \infty) - N^*(r, \infty) + N^*(r, 0) \tag{II.1}$$

zählt die mehrfachen Stellen von $w(z)$ mit um 1 verminderter Vielfachheit, wenn sich die mit einem Stern versehenen Größen auf $w'(z)$ beziehen. Man bilde dann den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r),$$

woraus man nach dem 1. Hauptsatz die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} (q-2)\, T(r|r_0) = {} & \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) + \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi + \\ & + \frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi \, d|z| + D(r, r_0) \end{aligned}\right. \tag{II.2}$$

erhält. Darin ist

$$\Phi(z) = \frac{|w'|}{(1+|w|^2)} \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \tag{II.3}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} D(r, r_0) = {} & -\frac{1}{2\pi r_0^k} \int_{\Gamma_{r_0}} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi + \\ & + \frac{r_0}{2k} \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1 \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi \right) \right]_{r=r_0} \end{aligned}\right. \tag{II.4}$$

gesetzt worden. Offenbar ist

$$D(r, r_0) = O(1), \tag{II.5}$$

so daß noch die beiden Integrale in (II.2) abzuschätzen sind. Das soll in diesem Paragraphen für das erste davon geschehen, dazu sei

$$J_1 = \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi. \tag{II.6}$$

Zur Abkürzung werde ferner

(II.7) $$\Psi(z) = \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \cdot \varrho(w)$$

definiert, nach (I.21) gilt

(II.8) $$\Phi^2(z) = \Psi(z) \cdot \frac{1}{C} \cdot \log^2 \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} .$$

Für J_1 folgt daraus

(II.9) $$J_1 = \frac{1}{4\pi i^k} \int_{\Gamma_r} \left\{ \log \Psi - \log C + 2 \log \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \right\} \cos k\varphi \, d\varphi .$$

Nun wird ein bekannter Hilfssatz verwendet:

Hilfssatz 1: *Auf der meßbaren Menge Δ seien $f(x)$ und $g(x)$ nicht negativ, nicht identisch Null und $g(x)$, $f(x)$ sowie $\log f(x)$ seien quadratisch integrierbar. Dann gilt*

(II.10) $$\frac{1}{C} \int_\Delta g(x) \log f(x) \, dx \leq \log \left\{ \frac{1}{C} \int_\Delta g(x) f(x) \, dx \right\} \qquad \left(C = \int_\Delta g(x) \, dx \right).$$

Die Anwendung von (II.10) in (II.9) liefert für die r, für die $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$ auf Γ_r ist,

(II.11) $$J_1 \leqq \frac{1}{2\pi k r^k} \left\{ \log \int_{\Gamma_r} \Psi \cos k\varphi \, d\varphi + 2 \log \int_{\Gamma_r} \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \cos k\varphi \, d\varphi + O(1) \right\}.$$

Hier sei bemerkt, daß die rechte Seite von (II.11) für $r \geqq 1$ bei wachsendem k monoton abnimmt. Für ein k-Intervall wird die Abschätzung in k gleichmäßig, wenn man in (II.11) das kleinste k wählt. Dieser Hinweis wird in § 3 benutzt.

Nach dem 1. Hauptsatz ist

(II.12) $$m(r, a) \leqq T(r|r_0) + O(1)$$

und nach (I.27) bis auf die soeben ausgeschlossenen r

(II.13) $$S'_\varrho(r|r_0) = r^{k+1} \int_{\Gamma_r} \Psi(z) \cos k\varphi \, d\varphi .$$

Setzt man dies in (II.11) ein, so erhält man

(II.14) $$J_1 \leqq \frac{1}{2\pi k r^k} \{ \log S'_\varrho(r|r_0) + 2 \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O(1) \}.$$

Dabei sei $\overset{+}{\log} a = \operatorname{Max}\{\log a, 0\}$.

Jetzt muß ein zweiter, ebenfalls bekannter Hilfssatz herangezogen werden.

Hilfssatz 2: *Für $x \geqq x_0$ sei $g(x) > 0$, stetig, monoton wachsend und bis auf isolierte Punkte differenzierbar. Dann ist das Maß der Menge*

$$\{x | g'(x) > g^2(x), \; x \geqq x_0\}$$

nach oben beschränkt.

$S_\varrho(r|r_0)$ und $T_\varrho(r|r_0)$ genügen den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes, bis auf eine Menge Δ_r von beschränktem Maß sind die Ungleichungen

(II.15) $$S'_\varrho(r|r_0) \leqq S^2_\varrho(r|r_0) \leqq r^{4k+2} T^4_\varrho(r|r_0)$$

erfüllt. Zusammen mit (I.29) ergibt das für J_1

$$J_1 \leqq \frac{3}{\pi k r^k} \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O\left(\frac{\log r}{r^k}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \tag{II.16}$$

(II.2) und (II.16) ermöglichen die folgende Formulierung des 2. Hauptsatzes:

2. HAUPTSATZ: *$w(z)$ sei in $H^k_{r_0}$ (0.1) eindeutig und meromorph. Für die verschiedenen komplexen Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ gelte auf Γ_{r_0} $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$, ferner sei dort $w'(z) \neq 0, \infty$.*

Mit den Definitionen (I.13—14), (II.1) *und* (II.3) *gilt dann*

$$\begin{cases} (q-2)\, T(r|r_0) \\ \qquad \leqq \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) + \frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi \, d|z| + R(r), \end{cases} \tag{II.17}$$

wobei bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß

$$R(r) \leqq \frac{3}{\pi k r^k} \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O(1) \qquad (r \notin \Delta_r) \tag{II.18}$$

ist.

In (II.17) steht noch ein Integral über die Randwerte von $w(z)$, das im nächsten Paragraphen untersucht wird. Hier soll eine Defektrelation angegeben werden, die keine Voraussetzungen über die Randwerte von $w(z)$ benötigt.

Dazu wird dieses Randintegral mit der Bezeichnung

$$\Theta(r) = -\frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \frac{|w'|}{(1+|w|^2)^2} \, d|z| \tag{II.19}$$

in

$$\sum_{\nu=1}^{q} \mu(r, a_\nu) - \Theta(r)$$

aufgespalten. Damit kann (II.17) in der Form

$$(q-2)\, T(r|r_0) = \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) - \Theta(r) + \sum_{\nu=1}^{q} \mu(r, a_\nu) + R(r) \tag{II.20}$$

geschrieben werden. Führt man die Größen

$$\delta^*(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a) + \mu(r, a)}{T(r|r_0)} \tag{II.21}$$

und

$$\Theta^* = \lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r) + \Theta(r)}{T(r|r_0)} \tag{II.22}$$

ein, so läßt sich aus (II.20) sofort folgern:

DEFEKTRELATION: *Sind $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ verschiedene komplexe Zahlen und gilt $\lim_{r\to\infty} T(r|r_0) = \infty$, so ist mit den Definitionen* (II.21—22) *die Beziehung*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta^*(a_\nu) \leqq 2 - \Theta^* \tag{II.23}$$

erfüllt.

(II.23) entspricht formal der Defektrelation für die Vollebene. Allerdings enthält $\delta^*(a)$ in $\mu(r, a)$ einen Anteil, der die Annahme des Wertes a am Rande des Winkelraumes mißt. Ebenso gehen in den Verzweigungsindex Θ^* durch $N_1(r)$ die mehrfachen Punkte im Innern von $H_{r_0}^k$ ein, durch $\Theta(r)$ die mehrfachen Stellen am Rande. Denn in der Nähe mehrfacher Stellen von $w(z)$ konvergiert $(1+|w|^2)\,|w'|^{-1}$ gegen ∞, was zur Vergrößerung von $\Theta(r)$ beiträgt.

Auch hier gelten die Ungleichungen $0 \leqq \delta^* \leqq 1$, also $\Theta^* \leqq 2$; im Gegensatz zur Vollebene kann aber Θ^* negativ und sogar $-\infty$ sein. Für endliches Θ^* ist die Menge der Werte mit positivem Defekt abzählbar.

§ 3. Der zweite Hauptsatz (Schluß)

Für diesen Paragraphen wird der 2. Hauptsatz in der Form (II.17—18) zugrunde gelegt. Um darin das Randintegral abzuschätzen, wird (II.17) über k von k_1 bis $k_2 = k_1 + \varepsilon$ integriert. Den $k > k_1$ entsprechen Winkelräume mit kleinerer Öffnung als π/k_1, so daß die Untersuchung ganz in $H_{r_0}^{k_1}$ durchgeführt wird. Man erhält

$$\text{(III.1)}\quad \left\{ \begin{aligned} (q-2)\int_{k_1}^{k_2} T_k(r\,|\,r_0)\,dk &= \int_{k_1}^{k_2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r) \right\} dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{k_1}^{k_2} k \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi \, d|z|\, dk + \int_{k_1}^{k_2} R(r)\,dk, \end{aligned} \right.$$

dabei sollen die linke Seite mit S_0, die Summanden der rechten Seite der Reihe nach mit S_1, S_2 bzw. S_3 bezeichnet werden. Diese Ausdrücke werden einzeln behandelt. Im folgenden wird zur Vereinfachung $r_0 \geqq 1$ vorausgesetzt.

Abschätzung von S_0: Gegeben ist

$$\text{(III.2)}\quad S_0 = \frac{q-2}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \iint_{G_t} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k \cos k\varphi \, d\sigma \, dk + \int_{k_1}^{k_2} O(1)\,dk.$$

Das $O(1)$ ist nach (I.17, 19) für $k_1 \leqq k \leqq k_2$ gleichmäßig beschränkt, wenn auf $\Gamma_{r_0}^{k_1}$ $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$ gilt. Die Entwicklung von

$$\text{(III.3)}\qquad H(k) = \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^k \cos k\varphi \, d\varphi \qquad (z = \tau e^{i\varphi})$$

nach dem Mittelwertsatz liefert

$$\text{(III.4)}\quad \left\{ \begin{aligned} H(k) = H(k_1) + (k-k_1) \int_{-\frac{\pi}{2\xi}}^{\frac{\pi}{2\xi}} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{\xi} \left\{ \log \frac{\tau}{t^2} \cdot \cos \xi\varphi - \varphi \sin \xi\varphi \right\} d\varphi \\ (k_1 < \xi < k_2). \end{aligned} \right.$$

Ableitungen nach den Grenzen des Integrals treten nicht auf, da dort der Integrand verschwindet. Wegen $\tau/t^2 \leqq r_0^{-1} \leqq 1$ nimmt $(\tau/t^2)^k \cos k\varphi$ für wachsendes k monoton ab ($|\varphi| \leqq \pi/2k$), also wird

$$H(k) \geqq H(k_1) + (k-k_1)\left\{H(k_1)\log\frac{\tau}{t^2} - \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{k_1}\pi\int_{-\frac{\pi}{2k_1}}^{\frac{\pi}{2k_1}}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\varphi\right\}.$$

Nach Integration von k_1 bis k_2 erhält man

$$\text{(III.5)}\qquad \int_{k_1}^{k_2} H(k)\,dk \geqq \varepsilon H(k_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{H(k_1)\log\frac{\tau}{t^2} - \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{k_1}\pi\int_{-\frac{\pi}{2k_1}}^{\frac{\pi}{2k_1}}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\varphi\right\}.$$

Dies muß in (III.2) eingesetzt werden, unter Berücksichtigung der Definition (I.30) und der Ungleichung $\tau/t^2 \geqq 1/r^2$ ergibt sich

$$S_0 \geqq \varepsilon(q-2)\,T_{k_1}(r|r_0) - \varepsilon^2(q-2)\left\{\left(T_{k_1}(r|r_0)+O(1)\right)\log r + \pi Z_{k_1}(r|r_0)\right\} + \varepsilon O(1).$$

Wegen $T_{k_1}(r|r_0) \leqq Z_{k_1}(r|r_0)$ kann man hier schließlich noch schreiben

$$\text{(III.6)}\qquad S_0 \geqq \varepsilon(q-2)\,T_{k_1}(r|r_0) - O(1)\,\varepsilon^2\left(Z_{k_1}(r|r_0)+1\right)\log r + \varepsilon O(1).$$

ABSCHÄTZUNG VON S_1: Zu untersuchen ist

$$\text{(III.7)}\qquad S_1 = \int_{k_1}^{k_2}\left\{\sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r)\right\}dk.$$

Da die Abschätzung von $N_{1k}(r)$ nach unten auf Schwierigkeiten stößt, werde die jede a-Stelle nur einfach zählende Anzahlfunktion

$$\text{(III.8)}\qquad \overline{N}_k(r, a) = \frac{1}{2k}\sum_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}}\left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}}\right)\cos k\varphi_\nu \qquad (z_\nu \neq z_\mu \text{ für } \nu \neq \mu)$$

eingeführt [vgl. (I.14)]. Dann gilt

$$\text{(III.9)}\qquad \sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r) \leqq \sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_k(r, a_\nu).$$

In $\overline{N}_k(r, a)$ nimmt mit wachsendem k die Zahl der berücksichtigten a-Stellen ab, ebenso ist jeder einzelne Summand

$$\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}}\right)\cos k\varphi_\nu$$

bezüglich k monoton fallend, wie man durch Differenzieren leicht nachprüfen kann. Damit wird

$$\overline{N}_k(r, a) \leqq \overline{N}_{k_1}(r, a) \qquad (k \geqq k_1)$$

und

$$\text{(III.10)}\qquad S_1 \leqq \int_{k_1}^{k_2}\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_{k_1}(r, a_\nu)\,dk = \varepsilon\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_{k_1}(r, a_\nu).$$

Abschätzung von S_2: In dem Ausdruck

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \Phi\, d|z|\, dk \tag{III.11}$$

kann man wie in § 2 nach (II.7—8)

$$\log \Phi = \frac{1}{2} \log \Psi - \frac{1}{2} \log C + \log \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \tag{III.12}$$

setzen. Der mittlere Summand liefert in S_2 ein $\varepsilon O(1)$,

$$\left\{ \begin{aligned} S_2 = {} & \frac{1}{4\pi} \int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \Psi\, d|z|\, dk + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]}\, d|z|\, dk + \varepsilon O(1). \end{aligned} \right. \tag{III.13}$$

Zuerst soll hier das zweite Integral behandelt werden, dafür sei

$$S_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]}\, d|z|. \tag{III.14}$$

Im inneren Integral wird der Hilfssatz 1 angewendet, wobei zu beachten ist, daß das Integral über γ_t für zwei Integrale von r_0 bis t steht. Diese müssen einzeln abgeschätzt werden, nachher kann man sie aber wegen $\log ab \leqq 2 \log (a+b)$ $(a, b \geqq 0)$ wieder zusammenziehen. Es ergibt sich

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{t^k - r_0^k}{t^{2k+1}} \log \left\{ \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]}\, d|z| \right\} dt + O(1),$$

aus der Definition (I.11) von $\mu_k(r, a)$ folgt weiter

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r} \frac{t^k - r_0^k}{t^{2k+1}} \left\{ \log \frac{\sum_{\nu=1}^{q} \mu_k'(t, a_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{q} \mu_k(t, a_\nu)} + \log \sum_{\nu=1}^{q} \mu_k(t, a_\nu) \right\} dt + O(1).$$

In der unteren Grenze des Integrals ist r_0 durch $r_1 > r_0$ ersetzt worden, das Integral von r_0 bis r_1 kann in das $O(1)$ hineingenommen werden. Auf Grund des Hilfssatzes 1 für den ersten Summanden bzw. des 1. Hauptsatzes für den zweiten wird daraus

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k r_0^k} \overset{+}{\log} \int_{r_1}^{r} \left(\log \sum_{\nu=1}^{q} \mu_k(t, a_\nu) \right)' \frac{dt}{t^{k+1}} + \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r} \frac{\overset{+}{\log}\, T_k(t|r_0)}{t^{k+1}}\, dt + O(1).$$

Integriert man das erste Integral partiell und wendet danach die Ungleichung $\overset{+}{\log}(a+b+c) \leqq \overset{+}{\log} a + \overset{+}{\log} b + \overset{+}{\log} c + \log 3$ an, so erhält man

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k r_0^k} \overset{+}{\log} \frac{\overset{+}{\log}\, T_k(r|r_0)}{r^{k+1}} + O\left(1 + \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log}\, T_k(t|r_0)}{t^{k+1}}\, dt\right).$$

Wegen der Monotonie von $T_k(r|r_0)$ in k (I.20) wird schließlich

$$\text{(III.15)} \qquad S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k_1 r_0^{k_1}} \overset{+}{\log} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(r|r_0)}{r^{k_1+1}} + O\left(1 + \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt\right).$$

Das $O(1)$ ist dabei für ein festes k-Intervall von k unabhängig. Endlich kann nach Hilfssatz 2 der erste Summand bis auf eine Ausnahmemenge Δ_r von endlichem Maß in den zweiten hineingenommen werden. Das Ergebnis ist in (III.13) einzusetzen:

$$\text{(III.16)} \qquad \begin{cases} S_2 \leqq \frac{1}{4\pi} \int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \Psi\, d|z|\, dk + \\ \qquad + \varepsilon\, O\left(1 + \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Das erste Integral in (III.16) werde S_{21} genannt,

$$\text{(III.17)} \qquad S_{21} = \frac{1}{4\pi} \int_{r_0}^{r} dt \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}} \log \Psi\, d|z|\, dk.$$

Hier kann erneut Hilfssatz 1 verwendet werden, der offenbar auch für mehrfache Integrale gültig bleibt. Beachtet man die Bemerkung nach (III.14), so folgt

$$\text{(III.18)} \qquad S_{21} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \log \left\{ \frac{1}{C_0(t)} \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}}\, \Psi\, d|z|\, dk \right\} dt,$$

wobei

$$\text{(III.19)} \qquad C_0(t) = \int_{r_0}^{t} \int_{k_1}^{k_2} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}}\, dk\, d|z|$$

ist. Aus (III.19) gewinnt man wegen $|z|/t^2 \leqq 1$ leicht die Ungleichung

$$\text{(III.20)} \qquad \varepsilon \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{t^{k_2} - r_0^{k_2}}{t^{2k_2+1}} \leqq C_0(t) \leqq \varepsilon \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1}{t^{k_1+1}},$$

diese wiederum ergibt zusammen mit (III.18)

$$\text{(III.21)} \qquad \begin{cases} S_{21} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t)\, dt \log \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{|z|^{k+1}}{t^{2k+1}}\, \Psi\, d|z|\, dk + \\ \qquad + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Dabei ist noch die Potenz von $|z|$ geeignet verändert worden. Das Doppelintegral vergrößert sich, wenn man im Exponenten k durch k_1 ersetzt. Ferner tritt k im Argument von $w(z)$ als $z = |z|\, e^{\pm i\pi/2k}$ auf. Setzt man $\pm\pi/2k = \varphi$, so

verwandelt sich das Doppelintegral in ein Flächenintegral über das Gebiet

$$K_t = \left\{ z \,|\, r_0 < |z| < t, \frac{\pi}{2k_2} < |\varphi| < \frac{\pi}{2k_1} \right\}.$$

Ohne später die gesamte Abschätzung zu verschlechtern, kann K_t durch $G_t^{k_1}$ ersetzt werden, denn der hinzugefügte Teil ist nur ein $O\left(\frac{1}{\varepsilon} T'_{k_1 \varrho}(t|r_0)\right)$. Mit der Definition (I.31) von $Z_{k\varrho}(r|r_0)$ folgt also aus (III.21)

$$S_{21} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \log Z'_{k_1 \varrho}(t|r_0)\, dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \left\{ \log (\log Z_{k_1 \varrho})' + \log Z_{k_1 \varrho} \right\} dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Wie bei der Untersuchung von S_{22} erhält man hier durch Anwendung der Hilfssätze 1 und 2 auf den ersten Summanden

$$\text{(III.22)} \qquad S_{21} \leqq \varepsilon O(1) \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} Z_{k_1 \varrho}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (r \notin \Delta_1).$$

Dabei ist zum Schluß die obere Schranke (III.20) für $C_0(t)$ eingesetzt worden; Δ_1 ist eine Menge von beschränktem Maß. Zusammen mit (III.16) liefert (III.22) die endgültige Abschätzung von S_2:

$$\text{(III.23)} \qquad \begin{cases} S_2 \leqq \varepsilon O(1) \displaystyle\int_{r_0}^{r} \left\{ \overset{+}{\log} Z_{k_1 \varrho}(t|r_0) + \overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0) \right\} \frac{dt}{t^{k_1+1}} + \\ \qquad + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Schließlich bleibt noch die

Abschätzung von S_3: In

$$\text{(III.24)} \qquad S_3 = \int_{k_1}^{k_2} R(r)\, dk$$

ist auf Grund der Bemerkung nach (II.11) und der Ungleichung (II.18) bekannt, daß bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß gleichmäßig für $k_1 \leqq k \leqq k_2$ gilt

$$R(r) \leqq \frac{3}{\pi k_1 r^{k_1}} \overset{+}{\log} T_{k_1}(r|r_0) + O(1) \qquad (r \notin \Delta_r).$$

Dies kann man natürlich bezüglich k integrieren und erhält

$$\text{(III.25)} \qquad S_3 \leqq \frac{3\varepsilon}{\pi k_1 r^{k_1}} \log T_{k_1}(r|r_0) + \varepsilon O(1) \qquad (r \notin \Delta_r).$$

Damit sind die notwendigen Abschätzungen geleistet, in (III.1) werden (III.6, 10, 23, 25) eingesetzt. Im Ergebnis wird durch ε dividiert, ferner kann

k_1 durch k ersetzt und der Index k wieder fortgelassen werden. Die zusammenfassende Ungleichung lautet

$$\text{(III.26)}\quad \begin{cases} (q-2)\,T(r|r_0) \leqq \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r,a_\nu) + O(1)\int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} Z_\varrho(t|r_0) + \overset{+}{\log} T(t|r_0)\}\,\frac{dt}{t^{k+1}} + \\ \qquad + O(1)\left\{1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\left(Z(r|r_0)+1\right)\log r\right\} + \\ \qquad + O\left(\frac{\log T(r|r_0)}{r^k}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Δ_r ist wieder eine Menge von beschränktem Maß. $\log\frac{1}{x} + a\,x$ nimmt sein Minimum $\log a + 1$ für $x = \frac{1}{a}$ an, deshalb wird die bisher noch unbestimmte Größe ε zu

$$\text{(III.27)}\qquad \varepsilon = \varepsilon(r) = \frac{1}{\left(Z(r|r_0)+1\right)\log r}$$

festgelegt. Berücksichtigt man endlich

$$\text{(III.28)}\qquad \int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} T(t|r_0)\,\frac{dt}{t^{k+1}} \leqq O(1)\,\overset{+}{\log} T(r|r_0) \leqq O(1)\,\overset{+}{\log} Z(r|r_0),$$

so kann man den 2. Hauptsatz wie folgt formulieren:

2. HAUPTSATZ: *Die Funktion $w(z)$ sei im Winkelraum $H_{r_0}^k$ (0.1) eindeutig und meromorph, man definiere ihre Charakteristik nach* (I.19), *die Anzahlfunktion ihrer — einfach gezählten — a-Stellen durch* (III.8) *sowie die Hilfscharakteristiken $Z(r|r_0)$ und $Z_\varrho(r|r_0)$ durch* (I.30—31).

Sind dann $a_1, \ldots, a_q$ verschiedene komplexe Zahlen, so gilt bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß

$$\text{(III.29)}\quad \begin{cases} (q-2)\,T(r|r_0) \leqq \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r,a_\nu) + O\left(1 + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} r + \overset{+}{\log} Z(r|r_0)\right) + \\ \qquad + O(1)\int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} Z_\varrho(t|r_0)\,\frac{dt}{t^{k+1}} \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Die zu Beginn dieses Paragraphen gemachte Einschränkung $r_0 \geqq 1$ ist hier offenbar belanglos, da die fehlenden Größen nur ein $O(1)$ ausmachen.

Eigenschaften der Funktion $w(z)$ in Punkten außerhalb des Winkelraumes sind nicht benutzt worden. Die Funktionen $Z(r|r_0)$ und $Z_\varrho(r|r_0)$ in (III.29) haben gegenüber reinen Randintegralen den Vorteil, das Verhalten von $w(z)$ in der Nähe des Randes nicht so stark zu bewerten. $Z(r|r_0)$ bzw. $Z_\varrho(r|r_0)$ können leicht durch die Charakteristik in einem größeren Winkelraum abgeschätzt werden. Das Restglied in (III.29) lautet dann

$$O\left(1 + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} r + \overset{+}{\log} T_{k_0}(r|r_0)\right) \quad (k_0 < k).$$

Dieses Ergebnis erreicht nicht das von J. DUFRESNOY [5] angegebene, wie schon in der Einleitung bemerkt worden ist. Insbesondere enthält das obige

Restglied einen von $w(z)$ unabhängigen Summanden $\log\log r$, so daß hier für die Gültigkeit der bekannten Aussagen über die Werteverteilung stets

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log r}{T(r|r_0)} = 0$$

gefordert werden muß.

Literatur

[1] Ahlfors, L.: Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn., Comm. Phys.-Math. **8**, Nr. 10 (1935).

[2] Dinghas, A.: Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen I. Comp. Math. **5**, 107–118 (1937).

[3] — Über eine Eigenschaft der Charakteristik von meromorphen Funktionen in einer Halbebene. Math. Z. **44**, 354–361 (1939).

[4] — Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Math. Z. **44**, 568–572 (1939).

[5] — Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Math. Z. **66**, 389–408 (1957).

[6] Dufresnoy, J.: Sur les fonctions dans un angle. C. R. Acad. Sci. Paris **208**, 718–720 (1939).

[7] Habetha, K.: Eine Bemerkung zur Werteverteilung meromorpher Funktionen in der Halbebene. Arch. Math. **12**, 43–50 (1961)

[8] af Hällström, G.: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Acta Acad. Abo., Math. et Phys. **12**, Nr. 8 (1939).

[9] Nevanlinna, F. u. R.: Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, Nr. 5 (1922).

[10] Nevanlinna, R.: Über die Eigenschaften von meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, Nr. 12 (1925).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 15. Dezember 1960)

Vor kurzem erschien:

Coding Theorems of Information Theory

By Dr. J. Wolfowitz,

Professor of Mathematics, Cornell University, Ithaca/N.Y., USA

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 31. Reihe: Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik. Besorgt von J. L. Doob)

X, 125 Seiten Gr.-8°. 1961. Steif geheftet DM 22,—

In englischer Sprache

(Die Vorbereitungsrechte dieses Werkes für die USA und Canada liegen bei Prentice Hall, Englewood Cliffs)

CONTENTS

Heuristic Introduction to the Discrete Memoryless Channel · Combinatorial Preliminaries · The Discrete Memoryless Channel · Compound Channels · The Discrete Finite-Memory Channel · Discrete Channels with a Past History · General Discrete Channels · The Semi-Continuous Memoryless Channel · Continuous Channels with Additive Gaussian Noise · Mathematical Miscellanea · References.

FOR INFORMATION

This book requires no prior knowledge of information theory and only an elementary knowledge of probability theory. Starting from first principles the main known coding theorems of information theory are rigorously proved. New results are included and different methods of attack are illustrated. This monograph can serve as an introduction to the literature and to the reader's own research.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Digitale Rechenanlagen

Grundlagen · Schaltungstechnik · Arbeitsweise Betriebssicherheit

Von Dr. sc. techn. A. P. SPEISER,

Privatdozent an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Leiter des Forschungslaboratoriums Zürich der International Business Machines Corporation

Mit 301 Abbildungen. XVI, 432 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 69,—

ZUR INFORMATION

Der Bau von digitalen Rechenanlagen stellt steigende Anforderungen an die Kenntnisse des Konstrukteurs. Nicht nur auf dem Gebiet der Bauelemente, sondern auch auf dem Gebiet der arithmetischen Abläufe und der Gesamtorganisation stehen heute so viele Verfahren und Ideen zur Verfügung, daß es nicht einfach ist, eine zweckmäßige Wahl zu treffen. Dieses Buch stellt eine Übersicht über die gebräuchlichen, in der Praxis bewährten Anordnungen dar.

Das erste Kapitel vermittelt eine geschlossene Einführung in die Grundbegriffe und den Aufbau einer Rechenanlage und richtet sich an Leser, die auf diesem Gebiet noch keine Vorkenntnisse besitzen. Die folgenden Teile des Buches sind getrennt nach Kapiteln, die die Schaltelemente und ihre elektrischen Eigenschaften beschreiben, und solchen, die sich mit den Fragen des Zusammenwirkens dieser Schaltelemente in ganzen Anlageteilen befassen. Eine wichtige Stellung nehmen die Abläufe, die zu arithmetischen Operationen führen, ein. Anschließend wird der Gesamtaufbau einer Rechenmaschine behandelt. In diesem Zusammenhang kommen die Systemfragen zur Darstellung, die sich aus dem Verkehr der Anlageteile untereinander ergeben. Ein letztes Kapitel betrifft die Fragen der Betriebssicherheit; dazu gehört das Studium der Probleme, die mit dem Ausfall von Teilen zusammenhängen und die zu Richtlinien für den Entwurf betriebssicherer Schaltkreise führen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzbu
Printed in Germany